ПІДГОТОВКА ДО НМТ З МАТЕМАТИКИ

Теоретичні матеріали

Зміст

Вступ

Цей посібник відповідає чинній програмі національного мультипредметного тесту (НМТ) з математики. Опрацювавши його матеріали, учасники тестування зможуть швидко та якісно підготуватися до іспиту: повторити основні теми, систематизувати знання та закріпити вивчене.

Для ще більш ефективної підготовки рекомендуємо додаткові тестові матеріали, що допоможуть ознайомитися з реальними завданнями НМТ (бібліотека тестів регулярно поповнюється):

- **Збірник реальних тестів НМТ 2023 року**
- **Збірник реальних тестів НМТ 2024 року**
- **Збірник пробних тестів у форматі НМТ**

Підтримати мою роботу ви можете, придбавши **"преміум-версію"** цього посібника без реклами. Придбати можна за цим посиланням — https://vseosvita.ua/2-k3y8.

Також підписуйтеся на мої соціальні мережі, де я регулярно публікую методичні матеріали з математики та інформатики, проводжу пробні тести та ділюся корисними порадами для успішного складання НМТ і не тільки:

- https://vseosvita.ua/user/id882250
- https://www.facebook.com/parkhomchuk.tutor
- https://www.instagram.com/parkhomchuk_tutor
- https://www.youtube.com/@ukrainian_math

Пам’ятайте: успіх залежить не лише від знань, а й від системної підготовки та впевненості в собі. Вчіться, практикуйтеся — і результат обов’язково виправдає ваші очікування. Бажаю вам легкого тестування та високих балів!

Розділ І. Числа і вирази

Множини

Множина та її елементи

Під *множиною* розуміють сукупність будь-яких предметів, об'єктів, об'єднаних між собою певною спільною для них ознакою.

Предмети (об'єкти), з яких складається множина, називаються її *елементами*.

Якщо елемент a є елементом множини A, то символьно записують так: $a \in A$.

Якщо елемент x не є елементом множини A, то символьно записують так: $x \notin A$

Множина, що має скінчену кількість елементів, називається *скінченною*.

Якщо множина має нескінченну кількість елементів, вона називається *нескінченною*. Множина, що не має жодного елемента, називається *порожньою* й позначається символом $\varnothing$.

Дійсні числа

Числові множини

N — *множина натуральних чисел.*

$N = \{1; 2; 3; 4; 5, \dots, n, \dots\}$.

Z — *множина цілих чисел*, що містить у собі натуральні числа, протилежні їм числа й число нуль.

$Z = \{\dots, -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$.

Раціональними числами називаються числа, які можна подати у вигляді $\frac{m}{n}$, де $m \in Z$, $n \in N$. *Множина раціональних чисел позначається* Q.

Будь-яке раціональне число можна подати або у вигляді *скінченного десяткового дробу*, або у вигляді *нескінченного десяткового періодичного дробу*.

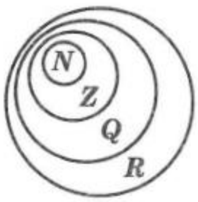
Ірраціональними числами називаються числа, які не можна подати у вигляді $\frac{m}{n}$, де $m \in Z$, $n \in N$.

Наприклад, число π, $\pi \approx 3{,}1415926\dots$; числа $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$ та інші.

Будь-яке ірраціональне число можна записати у вигляді *нескінченного неперіодичного десяткового дробу*.

Наприклад, $\sqrt{2} = 1{,}4142\dots$; $e = 2{,}7182818\dots$

Раціональні й ірраціональні числа утворюють *множину дійсних чисел*, яку позначають символом R (рисунок)



$N \subset Z \subset Q \subset R$

Правила порівняння дійсних чисел

Порівняння звичайних дробів з однаковими знаменниками

Із двох дробів *з однаковими знаменниками* більший той, чисельник якого більший.
Із двох дробів *з однаковими чисельниками* менший той, знаменник якого більший.
Правильний дріб менший від одиниці.
Дріб, у якого чисельник дорівнює знаменнику, дорівнює одиниці.
Дріб, у якого чисельник більший від знаменника, більший за одиницю.
Неправильний дріб більший, ніж правильний.

Порівняння звичайних дробів з різними знаменниками

Щоб виконати порівняння, додавання, віднімання дробів *із різними знаменниками*, треба звести їх до найменшого спільного знаменника, а потім виконати потрібну дію за аналогічним правилом для дробів з однаковими знаменниками.

Завжди треба звертати увагу, чи можна спростити отримане число: виділити цілу частину або скоротити дробову частину.

Іноді дроби з різними знаменниками можна порівняти, не зводячи їх до спільного знаменника і скориставшись правилом, що неправильний дріб завжди більший, ніж правильний.

Порівняння натуральних чисел

Із двох *натуральних* чисел, що мають різне число цифр, більшим є те, у якого цифр більше. Із двох натуральних чисел, що мають однакове число цифр, більшим є те, у якого більше одиниць у найвищому розряді. Якщо число одиниць у цьому розряді однакове, порівнюють число одиниць у наступному розряді й т. д.

Порівняння цілих чисел

Будь-яке додатне число більше за нуль.

Будь-яке від'ємне число менше від нуля.

Будь-яке додатне число більше за будь-яке від'ємне.

Із двох від'ємних чисел меншим є те, модуль якого більший.

Порівняння десяткових дробів

Із двох десяткових дробів більший той, у якого більша ціла частина. Якщо цілі частини дробів рівні, то більшим буде той дріб, у якого більше число десятих; якщо й вони рівні, порівнюють число сотих і т. д.

Властивості арифметичних дій над дійсними числами

Нехай a, b, c — дійсні додатні числа, тоді

$a+b=b+a$; $(a+b)+c=a+(b+c)$; $a+0=a-0=a$; $a+(-a)=0$;	$-(-a)=a$; $0-a=-a$; $a(b+c)=ab+ac$.	$ab=ba$; $(ab)c=a(bc)$; $a\cdot 1=1\cdot a=a$; $a\cdot 0=0\cdot a=0$; $a\cdot\frac{1}{a}=1$;	$0:a=0$; $\frac{a}{0}$ — не визначено; $(a+b):c=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$

Степінь

У записі $a^n = b$ число a називається ***основою степеня***, n — ***показником степеня***, b — ***значенням степеня***.

Степінь із натуральним показником:

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}$, $n \in N$, $n \geqslant 2$. $1^n = 1$, $n \in N$; $0^n = 0$, $n \in N$; $a^1 = a$.

Степінь із нульовим показником: $a^0 = 1$, $a \neq 0$.

Нульовий степінь нуля $\left(0^0\right)$ не визначено.

Степінь із від'ємним цілим показником: якщо $a \neq 0$ і $n \in N$, то $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Вираз 0^{-n}, де $n \in N$, не визначено.

Степінь із раціональним показником: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, де $a > 0$; $m \in Z$, $n \in N$, $n \geqslant 2$.

Наприклад, $144^{\frac{1}{2}} = \sqrt{144} = 12$; $16^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^{-3}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{16^3}} = \dfrac{1}{8}$

Властивості степенів із цілим показником

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $m \in Z$, $n \in Z$. *Наприклад,* $5^7 \cdot 5^{-5} = 5^{7-5} = 5^2 = 25$.
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$, або $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $m \in Z$, $n \in Z$. *Наприклад,* $3^{-3} : 3^{-5} = 3^{-3-(-5)} = 3^2 = 9$.
3. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$, $m \in Z$, $n \in Z$. *Наприклад,* $\left((-2)^5\right)^2 = (-2)^{10} = 1024$.
4. $(ab)^n = a^n b^n$, $n \in Z$. *Наприклад,* $(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216$.
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $n \in Z$. *Наприклад,* $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{(-2)^4}{3^4} = \dfrac{16}{81}$.
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$, $n \in Z$. *Наприклад,* $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5} = \left(\dfrac{2}{1}\right)^5 = 2^5 = 32$.
7. $a^{2k} > 0$, $a \neq 0$, $k \in N$. *Наприклад,* $5^2 = 25 > 0$; $(-3)^4 = 81 > 0$; $(-7)^{-2} = \dfrac{1}{49} > 0$.
8. Якщо $a > 0$, то $a^{2k-1} > 0$, $k \in N$; якщо $a < 0$, то $a^{2k-1} < 0$, $k \in N$.

   Наприклад, $2^3 = 8 > 0$; $(-2)^3 = -8 < 0$

Властивості степенів із раціональним показником

Властивості степенів із цілими показниками справджуються й для степенів із раціональними показниками:

$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$; $a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1 - r_2}$; $\left(a^{r_1}\right)^{r_2} = a^{r_1 r_2}$; $(ab)^r = a^r b^r$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$, $b \neq 0$.

Наприклад, $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}}$;

$$\left(a^{\frac{1}{5}} b^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{15}{16}} = a^{\frac{1}{5} \cdot \frac{15}{16}} \cdot b^{\frac{1}{3} \cdot \frac{15}{16}} = a^{\frac{3}{16}} b^{\frac{5}{16}}; \quad \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}} = a^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{1}{2}}$$

Подільність натуральних чисел

Дільники і кратні

Дільником натурального числа a називають натуральне число, на яке a ділиться без остачі.
Кратним натуральному числу a називається натуральне число, яке ділиться на a без остачі.

Прості й складені числа

Натуральне число називається ***простим***, якщо воно має тільки два різні дільники: одиницю й саме це число.

Число, яке має більше двох дільників, називається ***складеним***.

Число 1 має єдиний дільник — 1, тому не належить ні до простих, ні до складених чисел.

Ознака подільності на	Діляться ті й тільки ті натуральні числа
2	запис яких закінчується парною цифрою (тобто 0, 2, 4, 6, 8)
10	запис яких закінчується цифрою 0
5	запис яких закінчується цифрами 0 або 5
3	сума цифр яких ділиться на 3
9	сума цифр яких ділиться на 9

Знаходження найбільшого спільного дільника й найменшого спільного кратного

Найбільший спільний дільник

Найбільше натуральне число, на яке ділиться кожне із чисел a і b, називається ***найбільшим спільним дільником*** чисел a і b і позначається НСД (a; b).

Для знаходження найбільшого спільного дільника кількох натуральних чисел треба розкласти ці числа на прості множники й знайти добуток спільних множників.

Наприклад: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$,
НСД $(12; 18) = 2 \cdot 3 = 6$.

Якщо розкладання на прості множники записане з використанням степенів, треба знайти добуток степенів з однаковими основами з показниками, які є *найменшими* з використаних для запису чисел.

Наприклад: $20 = 2^2 \cdot 5$, $56 = 2^3 \cdot 7$,
НСД $(20; 56) = 2^2 = 4$.

Якщо всі дані числа кратні одному з них, це число буде найбільшим спільним дільником даних чисел.

Два натуральних числа, найбільший спільний дільник яких дорівнює 1, називаються ***взаємно простими***. Два прості числа завжди будуть взаємно простими

Найменше спільне кратне

Найменше натуральне число, яке ділиться на кожне із чисел a і b, називається ***найменшим спільним кратним*** чисел a і b і позначається НСК (a; b).

Щоб знайти найменше спільне кратне кількох чисел, кожне з них розкладають на прості множники й перемножують усі множники, які зустрічаються хоча б в одному розкладанні.

Наприклад: $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$,
НСК $(24; 36) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.

Якщо розкладання на прості множники записане з використанням степенів, треба знайти добуток *найбільших* степенів усіх чисел, що зустрічаються в розкладаннях.

Наприклад: $18 = 2 \cdot 3^2$, $24 = 2^3 \cdot 3$,
НСК $(18; 24) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$.

Якщо одне з даних чисел кратне іншим, то воно є найменшим спільним кратним цих чисел.

Найменшим спільним кратним взаємно простих чисел (зокрема простих чисел) є їх добуток.

Округлення цілих чисел і десяткових дробів

Округлення

Для *округлення числа до певного розряду* всі цифри праворуч від цього розряду замінюють нулями або відкидають, якщо вони стоять після коми.

Перша цифра за цим розрядом

- 0, 1, 2, 3, 4 → останню залишену цифру не змінюють
- 5, 6, 7, 8, 9 → останню залишену цифру збільшують на 1

Арифметичний квадратний корінь

Арифметичним квадратним коренем із невід'ємного числа a називається таке невід'ємне число b, квадрат якого дорівнює a.

Позначають так: $\sqrt{a}=b$; цей запис означає: $b^2=a$, $b\geqslant 0$. Символ $\sqrt{}$ називається знаком кореня або знаком радикала.

Наприклад, $\sqrt{16}=4$, оскільки $4^2=16$ і $4>0$.

Квадратний корінь із від'ємного числа не існує

Властивості арифметичного квадратного кореня

Основні тотожності

1. $\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert=\begin{cases} a, \text{ якщо } a\geqslant 0,\\ -a, \text{ якщо } a<0.\end{cases}$ *Наприклад,* $\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=\lvert 5\rvert=5$.	3. $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, де $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$. *Наприклад,* $\sqrt{25\cdot 16}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{16}=5\cdot 4=20$.
2. $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$; $\sqrt{0}=0$. *Наприклад,* $\left(\sqrt{9}\right)^2=9$.	4. $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, де $a\geqslant 0$, $b>0$. *Наприклад,* $\sqrt{\dfrac{25}{16}}=\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}}=\dfrac{5}{4}=1\dfrac{1}{4}$

Внесення множника під знак квадратного кореня

$b\sqrt{a}=\sqrt{b^2a}$, якщо $b\geqslant 0$; $\quad b\sqrt{a}=-\sqrt{b^2a}$, якщо $b<0$

Винесення множника з-під знака квадратного кореня

$\sqrt{b^2a}=b\sqrt{a}$, якщо $b\geqslant 0$, $a\geqslant 0$; $\quad \sqrt{b^2a}=-b\sqrt{a}$, якщо $b<0$, $a\geqslant 0$. $\quad \sqrt{b^2a}=\lvert b\rvert\sqrt{a}$

Арифметичний корінь *n*-го степеня

Арифметичним коренем n-го степеня $(n\in N,\ n>1)$ з невід'ємного числа a називається таке невід'ємне число b, яке при піднесенні його до степеня n дає число a. Число n називається ***показником кореня***, число a — ***підкореневим виразом***.

Позначення: $\sqrt[n]{a}=b$; цей запис означає: $b^n=a$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.

Наприклад, $\sqrt[3]{8}=2$, оскільки $2^3=8$ і $2>0$; $\sqrt[4]{81}=3$, оскільки $3^4=81$, $3>0$.

Коренем ***непарного степеня*** з від'ємного числа a називається таке від'ємне число b, яке при піднесенні його до цього непарного степеня дорівнює числу a.

Запис $\sqrt[2k+1]{a}=b$ означає: $b^{2k+1}=a$, $b<0$, $k\in N$.

Наприклад, $\sqrt[3]{-27}=-3$, оскільки $(-3)^3=-27$; $\sqrt[5]{-32}=-2$, оскільки $(-2)^5=-32$

Властивості коренів

Основні тотожності

1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, $n\in N$, $n\geqslant 2$.

2. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$, $a\geqslant 0$, $n\in N$, $m\in Z$, $k\in N$, $n\geqslant 2$.

3. $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a\geqslant 0, \\ -a, \text{ якщо } a<0. \end{cases}$ Крім того, $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$, $k\in N$.

4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, $n\in N$, $k\in N$, $a\geqslant 0$, $n\geqslant 2$, $k\geqslant 2$.

5. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, $k\in N$, $n\in N$, $n\geqslant 2$, $a\geqslant 0$.

6. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.

7. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a\geqslant 0$, $b>0$.

Наприклад, $\sqrt[5]{\dfrac{32}{243}} = \dfrac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \dfrac{2}{3}$

Винесення множника з-під знака кореня:

$\sqrt[2k]{b^{2k}a} = |b|\cdot\sqrt[2k]{a} = \begin{cases} b\sqrt[2k]{a}, \text{ якщо } b\geqslant 0, \\ -b\sqrt[2k]{a}, \text{ якщо } b<0,\ a>0,\ k\in N. \end{cases}$ $\sqrt[2k+1]{b^{2k+1}a} = b\sqrt[2k+1]{a}$, $k\in N$.

Наприклад, $\sqrt[5]{32\cdot 3} = \sqrt[5]{32}\cdot\sqrt[5]{3} = 2\sqrt[5]{3}$

Внесення множника під знак кореня:

$b\sqrt[2k]{a} = \sqrt[2k]{b^{2k}a}$, якщо $b\geqslant 0$,

$b\sqrt[2k]{a} = -\sqrt[2k]{b^{2k}a}$, якщо $b<0$, $k\in N$. $b\sqrt[2k+1]{a} = \sqrt[2k+1]{b^{2k+1}a}$, $k\in N$.

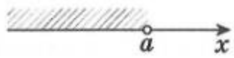
Наприклад, $2\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{32}\cdot\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{96}$; $-3\sqrt[4]{2} = -\sqrt[4]{3^4\cdot 2} = -\sqrt{162}$

Числові проміжки

Проміжки

Якщо точка — кінець проміжку входить у проміжок, її позначають на рисунку зафарбованим кружечком, а в записі проміжку використовують квадратну дужку; якщо точка — кінець проміжку не входить у проміжок, її позначають порожнім кружечком (це «виколота» точка), а в записі проміжку використовують круглу дужку. Круглу дужку використовують також у записі нескінченного (необмеженого) проміжку. Проміжок може бути необмеженим з одного боку або з обох боків.

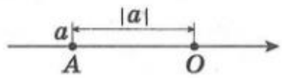
Назва	Позначення	Зображення
Числова пряма	$(-\infty; +\infty)$, R	
Закритий проміжок (відрізок)	$[a; b]$	

Відкритий проміжок	$(a;\ b)$	
Напіввідкритий проміжок	$[a;\ b)$	
	$(a;\ b]$	
Нескінченний проміжок (промінь)	$(-\infty;\ a]$	
	$(-\infty;\ a)$	
	$(a;\ +\infty)$	
	$[a;\ +\infty)$	

Модуль дійсного числа

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a > 0, \\ -a, \text{ якщо } a < 0, \\ 0, \text{ якщо } a = 0. \end{cases}$$

Геометрична інтерпретація: якщо точка A має на числовій прямій координату a (рисунок), то відстань від A до O дорівнює $|a|$, тобто $AO = |a|$.



Властивості модуля

$\lvert a\rvert \geqslant 0$;	$\lvert a^n\rvert = \lvert a\rvert^n$;	$\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$;	$a \leqslant \lvert a\rvert$;
$\lvert a\rvert^2 = a^2$;	$\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$;	$\lvert a\rvert^{2k} = a^{2k},\ k \in N$;	$\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert},\ b \neq 0$;

Відношення та пропорції

Відношення	Пропорція
Відношенням двох чисел називається частка цих чисел. Відношення показує, у скільки разів одне число більше від другого або яку частину становить одне число від другого. *Наприклад:* $2 : 3$, $\frac{2}{3}$. При знаходженні відношення двох величин ці величини мають бути виміряні однією й тією ж одиницею вимірювання. **Основна властивість відношення** Якщо обидва числа a і b помножити або поділити на одне й те саме натуральне число, одержимо відношення, що дорівнює даному відношенню $a : b$.	Рівність двох відношень називається ***пропорцією***. $a : b = c : d$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. У наведеному записі числа a і d називають крайніми членами пропорції, а числа b і c — середніми членами. **Основна властивість пропорції** У правильній пропорції добуток крайніх членів дорівнює добутку середніх.

Відсотки

Відсоток

Відсоток — 0,01 частина величини, 1 %.

Будь-який десятковий дріб можна записати у відсотках. Для цього його треба помножити на 100. *Наприклад:* 0,25 = 25 %, 0,05 = 5 %.

Щоб знайти ***відсотки від числа***, треба це число поділити на 100 й помножити на число відсотків. (Або записати відсотки у вигляді десяткового дробу й помножити число на цей дріб.)

Щоб знайти ***число за його відсотками***, треба помножити дане число на 100 й поділити на число відсотків. (Або записати відсотки у вигляді десяткового дробу й поділити дане число на цей дріб.)

Щоб знайти, ***скільки відсотків становить одне число від іншого***, треба перше число поділити на друге, а одержаний десятковий дріб записати у вигляді відсотків, тобто помножити на 100. (Або помножити перше число на 100 і результат поділити на друге число.)

Вирази

Тотожно рівні вирази. Тотожність

Два вирази зі змінними називаються ***тотожно рівними*** на певній множині, якщо їхні відповідні значення збігаються при всіх значеннях змінних, що належать до цієї множини.

Наприклад, вирази $3(x+2)$ і $3x+6$ є тотожно рівними на множині всіх дійсних чисел; $(a+b)^2$ і $a^2+2ab+b^2$ — тотожно рівні вирази на множині всіх пар дійсних чисел.

Тотожним перетворенням виразу називається заміна виразу на тотожно рівний йому.

Рівність, у якій права і ліва частини — тотожно рівні вирази на певній множині, називається ***тотожністю*** на цій множині. *Наприклад*, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ — тотожності

Одночлени й многочлени

Одночлени. Дії над одночленами

Одночленом називається добуток чисел, змінних та їхніх натуральних степенів, а також самі числа, змінні та їхні натуральні степені.

Щоб ***помножити одночлен на одночлен***, треба перемножити їхні коефіцієнти й перемножити степені з однаковими основами.

Наприклад, $12a^2xy\cdot(-3xy^2z)=-36a^2x^2y^3z$.

Щоб ***піднести одночлен до степеня***, потрібно піднести його коефіцієнт до цього степеня й помножити показник степеня кожної букви на показник степеня, до якого підносять одночлен.

Наприклад, $(-2x^2yz^6)^4=16x^8y^4z^{24}$.

Щоб ***поділити одночлен на одночлен***, треба поділити коефіцієнт діленого на коефіцієнт дільника, до знайденої частки приписати множниками кожну змінну діленого з показником, що дорівнює різниці показників цієї змінної в діленому й дільнику.

Наприклад, $9x^7y^6z^5:(3x^3y^5z)=\frac{9}{3}x^{7-3}y^{6-5}z^{5-1}=3x^4yz^4$

Многочлени

Многочленом називається алгебраїчна сума кількох одночленів.

Наприклад, $5x^2-2x+3$; $7a^2b^2-5ab+xy$ — многочлени.

Подібні члени многочлена — це однакові одночлени або, якщо їх записати в стандартному вигляді, такі, які відрізняються тільки коефіцієнтами.

Щоб ***звести подібні члени***, треба додати їхні коефіцієнти й приписати їхню спільну буквену частину. *Наприклад*, $\underline{2ab}+\underline{\underline{3b^2}}-2a^2+a^2-\underline{5ab}+\underline{\underline{b^2}}=4b^2-3ab-a^2$.

Стандартний вигляд многочлена — це запис многочлена, де всі члени многочлена — одночлени стандартного вигляду й серед них немає подібних. *Наприклад*, $ab+bc+abc$ — многочлен стандартного вигляду.

Степенем многочлена стандартного вигляду називається найбільший степінь одночленів, що утворюють многочлен. *Наприклад*, степінь многочлена $2x^5y+3xy^2$ дорівнює 6

Додавання й віднімання многочленів

Щоб ***додати два многочлени***, досить з'єднати їх знаком «+» і звести подібні члени. При додаванні многочленів користуються ***правилом розкриття дужок:*** якщо перед дужками стоїть знак «+», то дужки можна опустити й зберегти знак кожного одночлена.

Наприклад, $\left(3x^2-2x+5\right)+\left(6x^2+5x-3\right)=\underline{3x^2}-\underline{\underline{2x}}+5+\underline{6x^2}+\underline{\underline{5x}}-3=9x^2+3x+2$.

Щоб ***знайти різницю двох многочленів***, треба поставити знак «–» перед узятим у дужки другим многочленом. При відніманні многочленів також користуються відповідним ***правилом розкриття дужок:*** якщо перед дужками стоїть знак «–», то дужки можна опустити, змінивши знак кожного одночлена, що був у дужках, на протилежний.

Наприклад, $\left(3x^2-2x+5\right)-\left(6x^2+5x-3\right)=\underline{3x^2}-\underline{\underline{2x}}+5-\underline{6x^2}-\underline{\underline{5x}}+3=-3x^2-7x+8$.

Щоб записати алгебраїчну суму кількох многочленів як многочлен стандартного вигляду, потрібно розкрити дужки й звести подібні члени.

Наприклад, $\left(2x^2-3x+2\right)-\left(3x^2-2x-1\right)-\left(-x^2+2x+1\right)+\left(-2x^2+x-1\right)=$

$=\underline{2x^2}-\underline{\underline{3x}}+2-\underline{3x^2}+\underline{\underline{2x}}+1+\underline{x^2}-\underline{\underline{2x}}-1-\underline{2x^2}+\underline{\underline{x}}-1=-2x^2-2x+1$

Множення і ділення многочленів

Щоб ***помножити одночлен на многочлен***, треба кожний член многочлена помножити на цей одночлен і одержані одночлени додати. *Наприклад*, $2a\left(a^2-a+2a^2\right)=2a^3-2a^2+4a^3=6a^3-2a^2$.

Щоб ***помножити многочлен на многочлен***, треба кожний член одного многочлена помножити на кожний член другого многочлена й одержані одночлени додати.

Наприклад, $(3x-2)(2x-3)=3x\cdot 2x-3\cdot 3x-2\cdot 2x+2\cdot 3=6x^2-9x-4x+6=6x^2-13x+6$.

Щоб ***поділити многочлен на одночлен***, потрібно кожний член многочлена поділити на цей одночлен і одержані результати додати.

Наприклад, $\left(5x^6-7x^4+3x^3-2x^2\right):(2x)=5x^6:(2x)-7x^4:(2x)+3x^3:(2x)-2x^2:(2x)=2{,}5x^5-3{,}5x^3+1{,}5x^2-x$

Формули скороченого множення

1. Квадрат суми (різниці) двох виразів: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.
   Наприклад, $(a+3)^2=a^2+6a+9$; $(x-2)^2=x^2-4x+4$.
2. Куб суми (різниці) двох виразів: $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$.
   Наприклад, $(a+1)^3=a^3+3a^2+3a+1$, $(a-2)^3=a^3-6a^2+12a-8$.
3. Добуток різниці двох виразів та їхньої суми: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.
   Наприклад, $(a-5)(a+5)=a^2-25$; $(2a-3b)(2a+3b)=4a^2-9b^2$.
4. Добуток суми (різниці) двох виразів та неповного квадрата їхньої різниці (суми): $(a\pm b)\left(a^2\mp ab+b^2\right)=a^3\pm b^3$.
   Наприклад, $(2a-3)\left(4a^2+6a+9\right)=8a^3-27$, $(2+y)\left(4-2y+y^2\right)=8+y^3$

Розкладання многочлена на множники

При розкладанні многочлена на множники використовують:

1) ***винесення спільного множника за дужки.***
   Наприклад, $5x^2+10x=5x(x+2)$;
2) ***спосіб групування.***
   Наприклад, $5x-5y-x^2+xy=(5x-5y)-(x^2-xy)=5(x-y)-x(x-y)=(x-y)(5-x)$;
3) ***формули скороченого множення.***
   Наприклад, $4a^2-9b^2=(2a-3b)(2a+3b)$, $27a^3+1=(3x+1)(9x^2-3x+1)$

Алгебраїчні вирази

Раціональні алгебраїчні вирази

Алгебраїчним виразом називається вираз, у якому числа й букви об'єднані чотирма арифметичними діями, а також діями піднесення до натурального степеня й добування арифметичного кореня. *Наприклад,* $a+\sqrt{b}$; $a+b^2\sqrt[3]{x}$; $\dfrac{3a^2}{\sqrt{a+b}}$ — алгебраїчні вирази.

Вираз, який не містить операції добування кореня зі змінної, називається ***раціональним.***

Раціональний вираз, що не містить дії ділення на змінну (букву) або на вираз, у якому є змінна, називається ***цілим.*** *Наприклад,* a^2+b; $\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}b^2$ — цілі вирази.

Раціональний вираз, який містить дію ділення на змінну (букву) або на вираз, у якому є змінна, називається ***дробовим.*** *Наприклад:* $\dfrac{x}{y}$; $\dfrac{3}{a+1}$ — дробові вирази.

Алгебраїчні дроби та дії над ними

Якщо a і b — алгебраїчні вирази, то вираз $\dfrac{a}{b}$ називається ***алгебраїчним дробом.***

Основна властивість дробу: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{ac}{bc}$, де $b\neq 0$, $c\neq 0$.

Основна властивість дробу використовується для скорочення дробів.

Наприклад, $\dfrac{x^2+5xy}{2xy+10y^2}=\dfrac{x(x+5y)}{2y(x+5y)}=\dfrac{x}{2y}$, $x\neq -5y$.

Наслідок: $\dfrac{-a}{-b}=-\dfrac{-a}{b}=-\dfrac{a}{-b}=\dfrac{a}{b}$.

Додавання й віднімання дробів з однаковими знаменниками: $\dfrac{a}{c}\pm\dfrac{b}{c}=\dfrac{a\pm b}{c}$, $c\neq 0$.

Щоб додати (відняти) дроби з ***різними знаменниками***, треба звести їх до спільного знаменника, а потім скористатися правилом додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками. *Наприклад,* $\dfrac{x^2}{x^2-4}-\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{x^2}{(x-2)(x+2)}-\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{x^2-x^2-2x}{(x-2)(x+2)}==\dfrac{-2x}{x^2-4}=\dfrac{2x}{4-x^2}$.

Множення дробів: $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$, $b\neq 0$, $d\neq 0$.

Наприклад, $\dfrac{x^2-4}{x^2}\cdot\dfrac{x}{2x+4}=\dfrac{(x^2-4)\cdot x}{x^2\cdot(2x+4)}=\dfrac{(x-2)(x+2)x}{x^2\cdot 2(x+2)}=\dfrac{x-2}{2x}$, $x\neq 0$, $x\neq -2$.

Ділення дробів: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$, $b\neq0$, $c\neq0$, $d\neq0$.

Наприклад, $\frac{x^2-9}{x+2}:\frac{x+3}{x^2-4}=\frac{x^2-9}{x+2}\cdot\frac{x^2-4}{x+3}=\frac{(x^2-9)(x^2-4)}{(x+2)(x+3)}=$

$=\frac{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}{(x+2)(x+3)}=(x-3)(x-2)=x^2-5x+6$, $x\neq\pm2$, $x\neq-3$

Ірраціональні алгебраїчні вирази

Алгебраїчний вираз називається ***ірраціональним***, якщо в ньому є дії добування арифметичного кореня з букв (змінних) або виразів, що містять букви (змінні).

Наприклад, $\sqrt{x}-\sqrt{y}$; $\sqrt{3x+5}$; $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ — ірраціональні вирази

Ірраціональні вирази та дії над ними

Щоб виконати ***множення (ділення) ірраціональних виразів із різними показниками кореня***, потрібно: звести їх до спільного показника, перемножити (поділити) підкореневі вирази й записати добуток (частку) під знак кореня зі спільним показником.

Наприклад, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[4]{\frac{b}{a}}=\sqrt[12]{\frac{a^4}{b^4}}\cdot\sqrt[12]{\frac{b^3}{a^3}}=\sqrt[3]{\frac{a^4\cdot b^3}{b^4\cdot a^3}}=\sqrt[12]{\frac{a}{b}}$.

Щоб виконати ***піднесення кореня до степеня***, треба піднести до цього степеня підкореневий вираз, залишивши той самий показник кореня.

Наприклад, $\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{2}}\right)^2=\sqrt[3]{\left(a+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt[3]{a^2+2\sqrt{2}\,a+2}$.

Щоб ***добути корінь із кореня***, треба перемножити показники коренів, а підкореневий вираз залишити без змін.

Наприклад, $\sqrt[3]{\sqrt{a+1}}=\sqrt[6]{a+1}$

Як звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу

Якщо знаменник дробу — ***корінь або добуток кореня і раціонального множника***, то треба чисельник і знаменник дробу домножити на такий степінь кореня того самого показника, щоб дістати степінь із показником, який дорівнює показнику кореня. *Наприклад,* $\frac{3a^2}{\sqrt[3]{a}}=\frac{3a^2\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}}=\frac{3a^2\sqrt[3]{a^2}}{a}=3a\sqrt[3]{a^2}$.

Якщо знаменник дробу — ***сума (різниця) квадратних коренів***, то слід помножити чисельник і знаменник на різницю (суму) тих самих радикалів. *Наприклад,* $\frac{a}{1-\sqrt{a}}=\frac{a\left(1+\sqrt{a}\right)}{\left(1-\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt{a}\right)}=\frac{a\left(1+\sqrt{a}\right)}{1-a}$, якщо $a\geqslant0$, $a\neq1$.

Якщо знаменник дробу — ***сума (різниця) кубічних коренів***, то слід домножити чисельник і знаменник дробу на неповний квадрат різниці (суми) тих самих радикалів. *Наприклад,* $\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$

Логарифми

Логарифмом додатного числа b $(b>0)$ за основою a $(a>0,\ a\neq1)$ називається показник степеня, до якого треба піднести основу a, щоб дістати число b; позначення: $\log_a b$.

Наприклад, $\log_2 16=4$; $\log_{\sqrt{3}} 3=2$; $\log_5 \frac{1}{25}=-2$.

Формула $a^{\log_a b}=b$, де $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, називається ***основною логарифмічною тотожністю.***

Десятковими логарифмами називаються логарифми, основа яких дорівнює 10; позначаються символом lg: $\log_{10} b=\lg b$.

Натуральними логарифмами називаються логарифми, основа яких дорівнює e $(e\approx2{,}7182818)$; позначаються символом ln: $\log_e b=\ln b$

Основні властивості логарифмів

1. $\log_a 1=0$ $(a>0,\ a\neq1)$.
2. $\log_a a=1$ $(a>0,\ a\neq1)$.
3. $\log_a (xy)=\log_a x+\log_a y$ $(a>0,\ a\neq1,\ x>0,\ y>0)$.

   Наприклад, $\log_5 15=\log_5 (3\cdot5)=\log_5 3+\log_5 5=\log_5 3+1$.
4. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$ $(a>0,\ a\neq1,\ x>0,\ y>0)$.

   Наприклад, $\log_2 \frac{3}{8}=\log_2 3-\log_2 8=\log_2 3-3$.
5. $\log_a x^p=p\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1,\ x>0)$.

   Наприклад, $\log_3 \sqrt[3]{3}=\log_3 3^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\log_3 3=\frac{1}{3}\cdot1=\frac{1}{3}$.
6. $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ $(a>0,\ a\neq1,\ b>0,\ c>0,\ c\neq1)$.

   Наприклад, $\log_2 3=\frac{\log_5 3}{\log_5 2}$; $\frac{\log_3 2}{\log_3 8}=\log_8 2=\frac{1}{3}$.

Наслідки:

1) $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ $(a>0,\ a\neq1,\ b>0,\ b\neq1)$; 3) $\log_{a^p} b=\frac{1}{p}\log_a b$ $(a>0,\ a\neq1,\ b>0)$;

2) $\log_a b=\log_{a^p} b^p$ $(a>0,\ a\neq1,\ b>0)$; 4) $\log_{a^q} a^p=\frac{p}{q}$ $(a>0,\ a\neq1)$

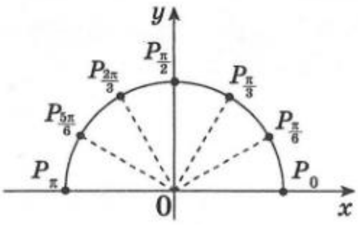
Означення та властивості тригонометричних функцій*

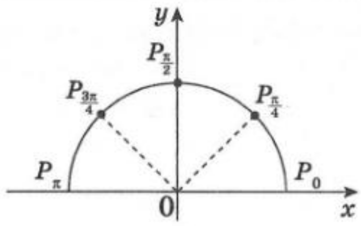
Радіанна система вимірювання кутів і дуг

π рад $=180^\circ$; $n^\circ=\frac{\pi n}{180}$ рад; α рад $=\frac{180^\circ\alpha}{\pi}$

* Функції — див. розділ 3.

Радіанна й градусна міри деяких кутів





Кути в радіанах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Кути в градусах	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°

Означення тригонометричних функцій

Косинусом числа t називається абсциса точки P_t одиничного кола: $\cos t = x_{P_t}$ (рис. 1).

Синусом числа t називається ордината точки P_t одиничного кола: $\sin t = y_{P_t}$ (рис. 2).

Тангенсом числа t називається відношення $\sin t$ до $\cos t$ $(\cos t \neq 0)$: $\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$ $\left(t \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z\right)$.

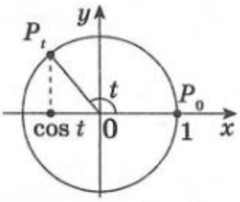


Рис. 1

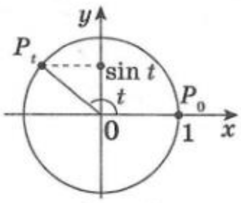
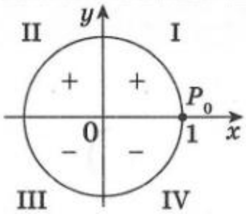
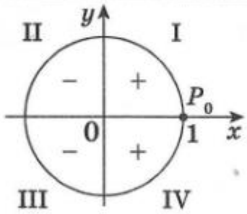


Рис. 2

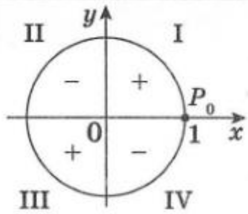
Знаки тригонометричних функцій



Знаки синуса



Знаки косинуса



Знаки тангенса

Значення тригонометричних функцій деяких кутів

	t, рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	t, град	0	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Функція	$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
	$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
	$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0

Основні тригонометричні формули

Співвідношення між тригонометричними функціями того самого аргумента

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ \alpha\in\boldsymbol{R};\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z};$$

Формули додавання

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;\qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \alpha\pm\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z};$$

Формули подвійного аргумента

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;\quad \cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;\quad \operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z};$$

Формули зниження степеня

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2};\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$$

Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big);$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big);$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\big)$$

Формули зведення

Функція	Аргумент t							
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin t$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos t$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} t$	$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	$-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	$-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$

Розділ II. Рівняння, нерівності та їх системи

Рівняння. Корені рівняння

Рівнянням називається рівність, що містить змінну (невідоме).

Коренем (розв'язком) рівняння з однією змінною називається значення змінної, яке перетворює рівняння в правильну числову рівність.

Розв'язати рівняння означає знайти всі його корені або довести, що їх немає.

Областю допустимих значень (ОДЗ) рівняння називається множина значень змінної, при яких вирази в обох частинах рівняння є визначеними

Рівносильні рівняння

Два рівняння називаються ***рівносильними***, якщо множини їхніх коренів збігаються.

Теореми про рівносильність рівнянь

1. Якщо до обох частин рівняння додати одне й те саме число або вираз зі змінною, який не втрачає змісту при будь-яких значеннях змінної, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.
   Наприклад, рівняння $x^2=9$ і $x^2+x=9+x$ є рівносильними.
2. Якщо з однієї частини рівняння перенести в другу частину доданок із протилежним знаком, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.
   Наприклад, рівняння $x^3=x-1$ і $x^3-x+1=0$ є рівносильними.
3. Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля, або на вираз зі змінною, який не перетворюється в нуль при будь-яких значеннях змінної і не втрачає змісту на множині допустимих значень невідомої для даного рівняння, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.
   Наприклад, рівняння $x^2=x$ і $\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{x}{x^2+1}$ є рівносильними.
4. Якщо обидві частини рівняння піднести до непарного натурального степеня, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.
   Наприклад, рівняння $x+1=0$ і $(x+1)^3=0$ є рівносильними

Лінійні рівняння

Лінійним рівнянням з однією змінною (невідомим) x називається рівняння виду $ax+b=0$, де a і b — дійсні числа. Якщо $a\neq 0$, то рівняння називається ***рівнянням першого степеня***

Схема розв'язування лінійних рівнянь

Квадратні рівняння

Квадратним рівнянням називається рівняння виду $ax^2+bx+c=0$, де a, b, c — дійсні числа, $a\neq 0$.

$D=b^2-4ac$ — ***дискримінант*** рівняння $ax^2+bx+c=0$

Схема розв'язування квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$

$ax^2+bx+c=0$

$D=b^2-4ac$

- $D<0$ → Коренів немає
- $D=0$ → $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$
- $D>0$ → $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

Окремі випадки квадратних рівнянь

Зведене квадратне рівняння $(a=1)$

$x^2+px+q=0$

$D=\dfrac{p^2}{4}-q$

- $D<0$ → Коренів немає
- $D=0$ → $x=-\dfrac{p}{2}$
- $D>0$ → $x_{1,2}=-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{D}$

Теорема Вієта

Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена ax^2+bx+c, то виконуються рівності $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

Якщо x_1 і x_2 — корені тричлена x^2+px+q, то справджуються формули $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$.

Якщо p, q, x_1, x_2 такі, що $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$, то x_1 і x_2 — корені тричлена x^2+px+q

Неповні квадратні рівняння

Рівняння виду $ax^2+bx=0$, $ax^2=0$, $ax^2+c=0$, де $a\neq 0$, називаються ***неповними квадратними рівняннями***

Схема розв'язування рівняння $ax^2+c=0$, $a\neq 0$

$$ax^2+c=0$$
$$\downarrow$$
$$ax^2=-c$$
$$\downarrow$$
$$x^2=-\frac{c}{a}$$

$-\frac{c}{a}>0$	$-\frac{c}{a}=0$	$-\frac{c}{a}<0$
$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	$x=0$	Коренів немає

Схема розв'язування рівняння $ax^2=0$, $a\neq 0$

$$ax^2=0$$
$$\downarrow$$
$$x^2=0$$
$$\downarrow$$
$$x=0$$

Схема розв'язування рівняння $ax^2+bx=0$, $a\neq 0$

$$ax^2+bx=0$$
$$\downarrow$$
$$x(ax+b)=0$$
$$\downarrow$$
$$x_1=0,\ x_2=-\frac{b}{a}$$

Розкладання квадратного тричлена на множники

Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена ax^2+bx+c, то виконується рівність $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Системи й сукупності рівнянь

Кілька рівнянь із однією змінною утворюють ***систему рівнянь***, якщо ставиться завдання: знайти всі такі значення змінної, кожне з яких є коренем кожного з рівнянь. Для позначення системи використовують фігурну дужку: $\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)=0. \end{cases}$

Кілька рівнянь із однією змінною утворюють ***сукупність рівнянь***, якщо ставиться завдання: знайти всі такі значення змінної, кожне з яких є коренем принаймні одного з даних рівнянь. Для позначення сукупності використовують квадратну дужку: $\left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0 \end{array}\right.$

Методи розв'язування рівнянь

Метод розкладання на множники

Якщо $p(x)=0$ і $p(x)=p_1(x)\cdot p_2(x)\cdot\ldots\cdot p_n(x)$, то рівняння $p(x)=0$ рівносильне сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} p_1(x)=0, \\ p_2(x)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n(x)=0. \end{array}\right.$$

Приклад розв'язання: $x^3+2x^2-3x-6=0$; $(x^3+2x^2)-(3x+6)=0$; $x^2(x+2)-3(x+2)=0$;
$(x+2)(x^2-3)=0$; $\left[\begin{array}{l}x+2=0,\\ x^2-3=0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=-2,\\ x^2=3;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=-2,\\ x=\pm\sqrt{3}.\end{array}\right.$ *Відповідь.* -2; $\pm\sqrt{3}$

Метод введення нової змінної

Якщо в рівнянні неодноразово зустрічається один і той самий вираз, який залежить від змінної, то доцільно позначити цей вираз іншою буквою й розв'язати рівняння відносно введеної змінної, а потім — відносно даної.

Приклад розв'язання: $(x^2+3x+1)(x^2+3x+3)+1=0$; нехай $x^2+3x+1=y$, тоді $x^2+3x+3=y+2$;
$y(y+2)+1=0$; $y^2+2y+1=0$; $(y+1)^2=0$; $y+1=0$; $y=-1$; $x^2+3x+1=-1$; $x^2+3x+2=0$; $\left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=-2.\end{array}\right.$
Відповідь. -1; -2

Цілі рівняння вищих степенів

Рівняння $f(x)=g(x)$ називається ***цілим***, якщо $f(x)$ і $g(x)$ — цілі вирази.

Біквадратні рівняння

Рівняння виду $ax^4+bx^2+c=0$, $a\neq 0$ називається ***біквадратним*** рівнянням. У ході його розв'язання роблять заміну $x^2=t$.

Тричленні рівняння

Рівняння виду $ax^{2n}+bx^n+c=0$, $a\neq 0$, $n\geqslant 2$, $n\in N$, називається ***тричленним***. У ході його розв'язання роблять заміну $x^n=t$ і розв'язують рівняння $at^2+bt+c=0$.

Рівняння зі змінною в знаменнику

Рівняння $\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ рівносильне системі $\begin{cases}f(x)=0,\\ g(x)\neq 0.\end{cases}$

Приклад розв'язання: $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+2x+1}=0$; $\begin{cases}x^2+4x+3=0,\\ x^2+2x+1\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1 \text{ або } x=-3,\\ x\neq -1.\end{cases}$ Отже, $x=-3$. *Відповідь.* -3

Раціональні рівняння

Рівняння $f(x)=g(x)$ називається ***раціональним***, якщо $f(x)$ і $g(x)$ — раціональні вирази.

Щоб розв'язати раціональне рівняння, потрібно:
1) знайти спільний знаменник усіх дробів, що входять до рівняння;
2) замінити дане рівняння цілим, помноживши обидві його частини на спільний знаменник;
3) розв'язати одержане ціле рівняння;
4) виключити з коренів цілого рівняння ті, які перетворюють у нуль спільний знаменник.

Приклад розв'язання:

$1+\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{6}{x^2-1}=\dfrac{3}{x+1}$; $1\cdot(x^2-1)+\dfrac{2}{x-1}\cdot\dfrac{x^2-1}{1}-\dfrac{6}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2-1}{1}=\dfrac{3}{x+1}\cdot\dfrac{x^2-1}{1}$;

$\begin{cases}x^2-1+2(x+1)-6=3(x-1),\\ x^2-1\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-7+2x+2=3x-3,\\ x^2\neq 1;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-x-2=0,\\ x\neq\pm 1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2 \text{ або } x=-1,\\ x\neq\pm 1.\end{cases}$

Отже, $x=2$. *Відповідь.* 2

Ірраціональні рівняння

Ірраціональним називається рівняння, у якому змінна міститься під знаком кореня або під знаком піднесення до дробового степеня

Найпростіші ірраціональні рівняння

$\sqrt[2n+1]{x}=a,\ n\in N$

$x=a^{2n+1}$

$\sqrt[2n]{x}=a,\ n\in N$

$a<0$ — Розв'язків немає

$a=0$ — $x=0$

$a>0$ — $x=a^{2n}$

Рівняння виду $\sqrt[2n+1]{f(x)}=g(x),\ n\in N$

Рівняння $\sqrt[2n+1]{f(x)}=g(x),\ n\in N$ рівносильне рівнянню $f(x)=g^{2n+1}(x)$.

Приклад розв'язання: $\sqrt[3]{-2x-5}=-3$; $-2x-5=(-3)^3$; $-2x-5=-27$; $-2x=-22$; $x=11$. *Відповідь.* 11

Рівняння виду $\sqrt[2n]{f(x)}=g(x),\ n\in N$

Рівняння $\sqrt[2n]{f(x)}=g(x),\ n\in N$ рівносильне системі $\begin{cases}f(x)=g^{2n}(x),\\ g(x)\geqslant 0.\end{cases}$

Приклад розв'язання:

$\sqrt{x+3}=2x+5$; $\begin{cases}x+3=(2x+5)^2,\\ 2x+5\geqslant 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x+3=4x^2+20x+25,\\ 2x+5\geqslant 0;\end{cases}$ $\begin{cases}4x^2+19x+22=0,\\ 2x+5\geqslant 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\ x=-5{,}5,\\ 2x+5\geqslant 0;\end{cases}$ звідси $x=-2$.

Відповідь. -2

Рівняння виду $\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)}$, $n\in N$

Рівняння $\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)}$, $n\in N$ рівносильне одній із систем: $\begin{cases}f(x)=g(x),\\ f(x)\geqslant 0\end{cases}$ або $\begin{cases}f(x)=g(x),\\ g(x)\geqslant 0.\end{cases}$

Приклад розв'язання: $\sqrt{x^2-3}=\sqrt{3+5x}$; $\begin{cases}x^2-3=3+5x,\\ x^2-3\geqslant 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-5x-6=0,\\ x^2-3\geqslant 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=6,\ x=-1,\\ x^2-3\geqslant 0;\end{cases}$ звідси $x=6$. *Відповідь.* 6

Показникові рівняння

Показниковими називаються рівняння, у яких змінна міститься в показнику степеня при сталих додатних основах

Найпростіші показникові рівняння

$a^{f(x)}=1$

$\begin{matrix}a>0\\ a\neq 1\end{matrix}$ — $f(x)=0$

$a=1$ — x — будь-яке число з ОДЗ

$a^{f(x)}=a^{g(x)}$

$\begin{matrix}a>0\\ a\neq 1\end{matrix}$ — $f(x)=g(x)$

$a=1$ — x — будь-яке число з ОДЗ

Рівняння виду $a^{f(x)}=b$, $a>0$, $a\neq1$, $b>0$

Рівняння $a^{f(x)}=b$, $a>0$, $a\neq1$, $b>0$ рівносильне рівнянню $f(x)=\log_a b$.

Приклад розв'язання: $3^x-2=0$; $3^x=2$; $x=\log_3 2$. *Відповідь.* $\log_3 2$

Логарифмічні рівняння

Логарифмічними називаються рівняння, що містять змінну під знаком логарифма.

Найпростіші логарифмічні рівняння

$\log_a x=b$, $a>0$, $a\neq1$ $\;\to\;$ $x=a^b$

$\log_a f(x)=b, a>0, a\neq1$ $\;\to\;$ $f(x)=a^b$

Рівняння виду $\log_a f(x)=g(x)$, $a>0$, $a\neq1$

Рівняння $\log_a f(x)=g(x)$, $a>0$, $a\neq1$ рівносильне системі: $\begin{cases}f(x)>0,\\ f(x)=a^{g(x)}.\end{cases}$

Приклад розв'язання: $\log_3(9^x-72)=x$; $\begin{cases}9^x-72=3^x,\\ 9^x-72>0;\end{cases}$ $\begin{cases}3^x=t,\\ t^2-t-72=0,\\ 9^x-72>0;\end{cases}$ $\begin{cases}3^x=9 \text{ или } 3^x=-8,\\ 9^x-72>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\ 9^x-72>0;\end{cases}$

отже, $x=2$. *Відповідь.* 2

Рівняння виду $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, $a>0$, $a\neq1$

Рівняння $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, $a>0$, $a\neq1$ рівносильне системі $\begin{cases}f(x)>0,\\ f(x)=g(x)\end{cases}$ або системі $\begin{cases}g(x)>0,\\ f(x)=g(x).\end{cases}$

Приклад розв'язання: $\lg(x+1{,}5)=\lg\frac{1}{x}$; $\begin{cases}x+1{,}5>0,\\ x+1{,}5=\frac{1}{x};\end{cases}$ $\begin{cases}x+1{,}5>0,\\ x^2+1{,}5x-1=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x+1{,}5>0,\\ x=-2 \text{ або } x=0{,}5;\end{cases}$

звідси $x=0{,}5$. *Відповідь.* 0,5

Рівняння з модулем

Найпростіші рівняння з модулем

$|x|=a$:
- $a<0$ → Розв'язків немає
- $a=0$ → $x=0$
- $a>0$ → $x=\pm a$

$|x-b|=a$:
- $a<0$ → Розв'язків немає
- $a=0$ → $x=b$
- $a>0$ → $x=\pm a+b$

Рівняння виду $|f(x)|=|g(x)|$

Рівняння $|f(x)|=|g(x)|$ рівносильне об'єднанню рівнянь $\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right.$ або рівнянню $f^2(x)=g^2(x)$. *Приклад розв'язання:* $|x|=|4-x|$; $\left[\begin{array}{l} x=4-x, \\ x=-4+x; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2x=4, \\ 0x=-4; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=\varnothing. \end{array}\right.$ *Відповідь.* 2

Рівняння виду $|f(x)|=g(x)$

Рівняння $|f(x)|=g(x)$ рівносильне об'єднанню двох систем: $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)\geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} f(x)=-g(x), \\ g(x)\geqslant 0. \end{cases}$

Приклад розв'язання: $|x^2-x-8|=-x$; $\begin{cases} x^2-x-8=-x, \\ -x\geqslant 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x^2-x-8=x, \\ -x\geqslant 0. \end{cases}$

1) $\begin{cases} x^2-x-8=-x, \\ -x\geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-8=0, \\ -x\geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=8, \\ -x\geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 2\sqrt{2}, \\ x\leqslant 0; \end{cases}$ отже, $x=-2\sqrt{2}$.

2) $\begin{cases} x^2-x-8=x, \\ -x\geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-2x-8=0, \\ -x\geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=4 \text{ або } x=-2, \\ x\leqslant 0; \end{cases}$ отже, $x=-2$.

Відповідь. -2; $-2\sqrt{2}$

Рівняння виду $|f(x)|=a$, $a\geqslant 0$

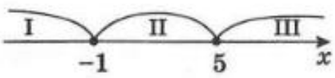
Рівняння $|f(x)|=a$, де $a\geqslant 0$, рівносильне об'єднанню рівнянь $\left[\begin{array}{l} f(x)=a, \\ f(x)=-a. \end{array}\right.$

Приклад розв'язання: $|x^2+5x+6|=2$; $\left[\begin{array}{l} x^2+5x+6=2, \\ x^2+5x+6=-2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2+5x+4=0, \\ x^2+5x+8=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=-4. \end{array}\right.$ *Відповідь.* -1; -4

Більш складні рівняння з модулем

У ході розв'язання більш складних рівнянь із модулем потрібно:
1) знайти ОДЗ рівняння;
2) знайти нулі всіх підмодульних функцій;
3) позначити знайдені нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на інтервали;
4) знайти розв'язок у кожному інтервалі та обов'язково перевірити, чи належить знайдений розв'язок до розглянутого інтервалу.

Приклад розв'язання: $|x+1|+|x-5|=20$. Вирази $x+1$ і $x-5$ дорівнюють нулю, якщо $x=-1$ і $x=5$ відповідно, тому розглянемо три випадки (рисунок).



I. $\begin{cases} x\leqslant -1, \\ -x-1-x+5=20; \end{cases}$ $\begin{cases} x\leqslant -1, \\ -2x=16; \end{cases}$ $\begin{cases} x\leqslant -1, \\ x=-8; \end{cases}$ отже, $x=-8$.

II. $\begin{cases} -1<x\leqslant 5, \\ x+1-x+5=20; \end{cases}$ $\begin{cases} -1<x\leqslant 5, \\ 0x=14; \end{cases}$ отже, коренів немає.

III. $\begin{cases} x>5, \\ x+1+x-5=20; \end{cases}$ $\begin{cases} x>5, \\ 2x=24; \end{cases}$ $\begin{cases} x>5, \\ x=12, \end{cases}$ отже, $x=12$.

Відповідь. -8; 12

Тригонометричні рівняння

Тригонометричними називаються рівняння, у яких невідоме (змінна) входить лише під знак тригонометричної функції

Рівняння виду $\cos t = a$ і $\sin t = a$

Рівняння $\cos t = a$

- $|a| \leqslant 1$: $t = \pm\arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$
- $|a| > 1$: Коренів немає

Окремі випадки:

- $\cos t = 0$ → $t = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$
- $\cos t = 1$ → $t = 2\pi n$, $n \in Z$
- $\cos t = -1$ → $t = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$

Рівняння $\sin t = a$

- $|a| \leqslant 1$: $t = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$
- $|a| > 1$: Коренів немає

Окремі випадки:

- $\sin t = 0$ → $x = \pi n$, $n \in Z$
- $\sin t = 1$ → $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$
- $\sin t = -1$ → $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$

Арксинусом числа a називається кут (число) t з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює a.

Запис $\arcsin a = t$ означає: $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin t = a$. *Наприклад,* $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$; $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Арккосинусом числа a називається кут (число) t з проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює a.

Запис $\arccos a = t$ означає: $t \in [0; \pi]$ і $\cos t = a$. *Наприклад,* $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$; $\arccos 1 = 0$.

Рівняння виду $\operatorname{tg} t = a$

Рівняння $\operatorname{tg} t = a$

$t = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in Z$

Окремі випадки:

- $\operatorname{tg} t = 0$ → $t = \pi n, n \in Z$

Арктангенсом числа a називається кут (число) t з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a.

Запис $\operatorname{arctg} a = t$ означає: $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg} t = a$. *Наприклад,* $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$; $\operatorname{arctg} 0 = 0$.

Зведення тригонометричних рівнянь до алгебраїчних

Деякі тригонометричні рівняння шляхом тотожних перетворень можна звести до рівняння з однією тригонометричною функцією, а потім зробити заміну й звести рівняння до алгебраїчного.

Приклад: $\sin^2 x + 4\cos x = 2{,}75$; $(1-\cos^2 x) + 4\cos x = 2{,}75$; $-\cos^2 x + 4\cos x - 1{,}75 = 0$; $\cos^2 x - 4\cos x + 1{,}75 = 0$.

$\begin{cases} \cos x = t, \\ t^2 - 4t + 1{,}75 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \cos x = t, \\ t = \frac{1}{2} \text{ або } t = \frac{7}{2}; \end{cases}$ тоді $\left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \cos x = \frac{7}{2}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z, \\ x = \varnothing. \end{array}\right.$ *Відповідь.* $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Розкладання на множники

Рівняння, права частина яких дорівнює 0, часто можна розв'язати розкладанням їхньої лівої частини на множники.

Приклад розв'язання: $\sin 5x=\sin x$; $\sin 5x-\sin x=0$; $2\sin\frac{5x-x}{2}\cos\frac{5x+x}{2}=0$; $\sin 2x\cos 3x=0$;

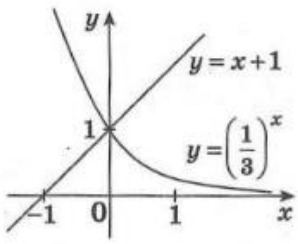
$\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0,\\ \cos 3x=0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}2x=\pi n,\ n\in Z,\\ 3x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi n}{2},\ n\in Z,\\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z.\end{array}\right.$ *Відповідь.* $\frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$

Графічний спосіб розв'язування рівнянь

Щоб графічно розв'язати рівняння $f(x)=g(x)$, слід побудувати графіки функцій $y=f(x)$ і $y=g(x)$ та знайти абсциси точок перетину побудованих графіків.

Наприклад, $\left(\frac{1}{3}\right)^x=x+1$ (розв'язання наведено на рисунку).

Відповідь. 0



Рівняння з двома змінними

Рівняння та його розв'язки

Рівність, яка містить дві змінні (невідомі), називається ***рівнянням із двома змінними*** (невідомими).

Розв'язком рівняння з двома змінними $f(x;\,y)=0$ називається впорядкована пара чисел, що перетворює його в правильну рівність. Якщо дано рівняння з двома змінними x і y, то прийнято в записі його розв'язків на першому місці ставити значення змінної x, а на другому — значення змінної y.

Наприклад, пари $(4;\,3)$, $(3;\,4)$, $(-3;\,4)$, $(-3;\,-4)$ — розв'язки рівняння $x^2+y^2=25$, однак пари $(1;\,5)$, $(2;\,3)$ розв'язками рівняння $x^2+y^2=25$ не будуть.

Рівняння з двома змінними, що мають одні й ті самі розв'язки, називаються ***рівносильними***. Рівняння з двома змінними, які не мають розв'язків, також вважають рівносильними.

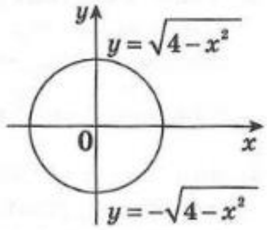
Для рівнянь із двома змінними справджуються теореми про рівносильні рівняння

Графік рівняння з двома змінними

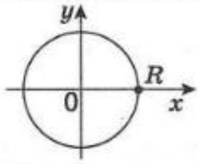
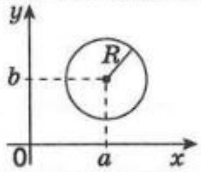
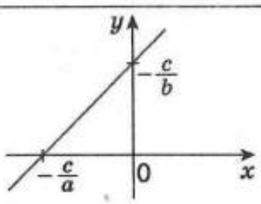
Графіком рівняння з двома змінними x і y називається множина всіх точок координатної площини з координатами $(x;\,y)$, де пара $(x;\,y)$ є розв'язком відповідного рівняння.

Графік рівняння слід відрізняти від графіка функції. Графік рівняння тільки тоді є графіком функції, коли кожна пряма, паралельна осі Oy, перетинає його не більше ніж в одній точці.

Наприклад, зображені на рисунку півкола — графіки функцій $y=\sqrt{4-x^2}$ (верхнє півколо) і $y=-\sqrt{4-x^2}$ (нижнє півколо). Їх об'єднання — усе коло — є графіком рівняння $x^2+y^2=4$



Графіки деяких рівнянь

Рівняння	Графік	Опис
$x^2+y^2=R^2$		Коло із центром $(0;\ 0)$ і радіусом R
$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$		Коло із центром $(a;\ b)$ і радіусом R
$ax+by+c=0$ $(a^2+b^2\neq 0)$	($a\neq 0$, $b\neq 0$; пряма перетинає осі координат у точках, показаних на рисунку)	*Інші випадки* пряма: — паралельна осі Ox ($a=0$); — паралельна осі Oy ($b=0$); — проходить через точку $(0;\ 0)$ ($c=0$)

Системи рівнянь

Системи рівнянь із двома змінними

Кілька рівнянь із двома змінними, стосовно яких поставлено завдання знайти всі спільні розв'язки, називаються ***системою рівнянь із двома змінними***.

Розв'язати систему рівнянь із двома змінними означає ***знайти всі її розв'язки*** або довести, що система розв'язків ***не має***.

Розв'язком системи рівнянь із двома змінними називається пара значень змінних, яка перетворює кожне рівняння системи в правильну рівність

Рівносильні системи рівнянь

Системи рівнянь із двома змінними, які мають одні й ті самі розв'язки, називаються ***рівносильними***. Системи рівнянь, що не мають розв'язків, також називаються ***рівносильними***

Теореми про рівносильність систем рівнянь

1. Якщо змінити порядок рівнянь системи, то дістанемо систему, рівносильну даній.
2. Якщо одне з рівнянь системи замінити на рівносильне йому рівняння, то дістанемо систему, рівносильну даній.
3. Якщо в системі рівнянь з одного рівняння виразити одну змінну через другу і підставити одержаний вираз замість цієї (першої) змінної в друге рівняння системи, то дістанемо систему, рівносильну даній.

   Наприклад, системи $\begin{cases} x-y=3, \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$ і $\begin{cases} y=x-3, \\ x^2+(x-3)^2=2 \end{cases}$ є рівносильними.
4. Якщо одне з рівнянь системи замінити сумою першого рівняння, помноженого на число α ($\alpha\neq 0$), і другого, помноженого на число β ($\beta\neq 0$), а одне з рівнянь залишити без змін, то дістанемо систему, рівносильну даній.

   Наприклад, системи $\begin{cases} 2x-3y=10, \\ 3x+2y=5 \end{cases}$ і $\begin{cases} (2x-3y)\cdot 2+(3x+2y)\cdot 3=35, \\ 3x+2y=5 \end{cases}$ є рівносильними

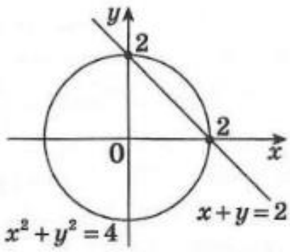
Графічний спосіб розв'язування системи рівнянь із двома змінними

Щоб розв'язати систему рівнянь ***графічним способом***, треба:

1) виконати рівносильні перетворення системи так, щоб зручно було побудувати графіки рівнянь системи;
2) накреслити графіки;
3) знайти координати точок перетину накреслених ліній. Ці координати і є розв'язками системи рівнянь.

Приклад розв'язання: $\begin{cases} x+y=2, \\ x^2+y^2=4. \end{cases}$ Побудувавши графіки рівнянь $x+y=2$ і $x^2+y^2=4$ (рисунок), знаходимо точки перетину ліній: $(0;\,2)$ і $(2;\,0)$.

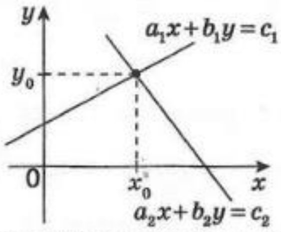
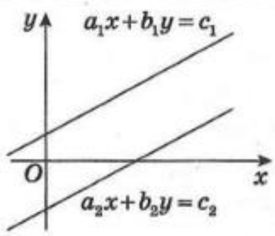
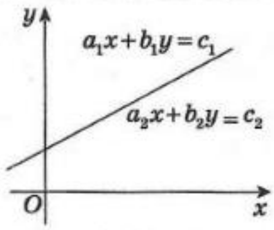
Відповідь. $(0;\,2)$, $(2;\,0)$



Системи лінійних рівнянь із двома змінними

Система виду $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ називається ***системою лінійних рівнянь із двома змінними***

Можливі випадки розв'язання системи

Умова	Графічна інтерпретація	Множина розв'язків
Коефіцієнти при невідомих (змінних) у рівнянні не пропорційні, тобто $a_1b_2 \neq a_2b_1$, або $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	 Прямі перетинаються	Один розв'язок: $x_0=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}$, $y_0=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$
Коефіцієнти при невідомих (змінних) у рівнянні пропорційні, тобто $a_1b_2=a_2b_1$, однак вони не є пропорційними вільним членам $a_1c_2 \neq a_2c_1$ або $b_1c_2 \neq b_2c_1$, тобто $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	 Прямі паралельні	Розв'язків немає
Коефіцієнти при невідомих (змінних) і вільні члени в рівнянні пропорційні, тобто $a_1b_2=a_2b_1$; $a_1c_2=a_2c_1$; $b_1c_2=b_2c_1$, або $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$	 Прямі збігаються	Безліч розв'язків

Розв'язування системи рівнянь із двома змінними способом додавання

Щоб розв'язати систему з двома змінними ***способом алгебраїчного додавання***, потрібно:

1) зрівняти коефіцієнти при одній зі змінних (при виразах) шляхом почленного множення обох рівнянь на множники, дібрані відповідним чином;
2) додати (або відняти) почленно рівняння системи, виключивши одну зі змінних; розв'язати одержане рівняння з однією змінною;
3) знайти значення другої змінної в такий самий спосіб (або підстановкою знайденого значення змінної в будь-яке із заданих рівнянь системи).

Приклад розв'язання: $\begin{cases}3x+2y=5,\\5x-3y=2.\end{cases}$ Почленно помноживши перше рівняння системи на 3, а друге — на 2, дістанемо систему $\begin{cases}9x+6y=15,\\10x-6y=4.\end{cases}$ Почленно додавши рівняння системи, маємо: $(9x+6y)+(10-6y)=15+4$, $19x=19$, $x=1$. Почленно помноживши перше рівняння на −5, а друге —на 3, дістанемо систему $\begin{cases}-15x-10y=-25,\\15x-9x=6.\end{cases}$ Додавши почленно рівняння, маємо: $-19y=-19$, $y=1$. *Відповідь.* $(1;1)$

Розв'язування системи рівнянь із двома змінними способом підстановки

Щоб розв'язати систему двох рівнянь із двома змінними ***способом підстановки***, треба:

1) виразити з одного рівняння системи одну змінну через другу;
2) підставити знайдене значення в друге рівняння системи й дістати рівняння відносно другої змінної;
3) розв'язати одержане рівняння;
4) підставити знайдені значення у вираз для першої змінної й дістати її відповідні значення.

Приклад розв'язання: $\begin{cases}x^2+y^2=34,\\x-y=2;\end{cases}$ $\begin{cases}(2+y)^2+y^2=34,\\x=2+y;\end{cases}$ $\begin{cases}4+4y+y^2+y^2=34,\\x=2+y;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2+y,\\2y^2+4y-30=0;\end{cases}$

$\begin{cases}x=2+y,\\y^2+2y-15=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2+y,\\y=-5 \text{ або } y=3.\end{cases}$ Отже, $\begin{cases}x=-3,\\y=-5\end{cases}$ або $\begin{cases}x=5,\\y=3.\end{cases}$ *Відповідь.* $(-3;-5)$, $(5;3)$

Нерівності й системи нерівностей з однією змінною

Нерівності з однією змінною та їхні розв'язки

Нерівністю з однією змінною (невідомим) називаються два вирази зі змінною (невідомим), поєднані знаком нерівності: $>$ (більше), $<$ (менше), $\geqslant$ (більше або дорівнює, не менше), $\leqslant$ (менше або дорівнює, не більше).

Розв'язком нерівності називається значення змінної (невідомого), при якому нерівність перетворюється в правильну числову нерівність.

Наприклад, число 5 є розв'язком нерівності $x^2-6x<0$, оскільки $5^2-6\cdot5<0$.

Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.

Множиною розв'язків нерівності є певна підмножина дійсних чисел

Рівносильні нерівності

Дві нерівності називаються ***рівносильними***, якщо множини їхніх розв'язків збігаються. Нерівності, що не мають розв'язків, так само вважаються рівносильними.

Областю допустимих значень (ОДЗ) нерівності називається множина значень змінної, при яких вирази в обох частинах нерівності визначені.

Наприклад, областю допустимих значень нерівності $x^2\geqslant x$ є множина дійсних чисел; областю допустимих значень нерівності $\sqrt{x+3}<x$ є множина $[-3;+\infty)$, оскільки вираз $\sqrt{x+3}$ визначений, якщо $x+3\geqslant0$

Теореми про рівносильність нерівностей

1. Якщо до обох частин нерівності додати одне й те саме число або вираз зі змінною, що не втрачає змісту при будь-якому значенні змінної з області визначення нерівності, то дістанемо нерівність, рівносильну даній. Звідси випливає, що з однієї частини нерівності можна перенести в другу доданок із протилежним знаком: $f(x)\pm g(x)\leqslant h(x)$, тоді $f(x)\leqslant h(x)\mp g(x)$.

   Наприклад, нерівності $x^2\leqslant x+2$ і $x^2-x-2\leqslant 0$ є рівносильними
2. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число або на вираз зі змінною, який набуває лише додатних значень і не втрачає змісту на множині допустимих значень змінної даної нерівності, то дістанемо нерівність, рівносильну даній.

   Наприклад, нерівності $5x\geqslant 10$ і $x\geqslant 2$; $\dfrac{x}{x^2+1}<1$ і $x<x^2+1$ є рівносильними.
3. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на те саме від'ємне число або на вираз зі змінною, який набуває лише від'ємних значень і не втрачає змісту на множині допустимих значень змінної даної нерівності, а також поміняти знак нерівності на протилежний, то дістанемо нерівність, рівносильну даній.

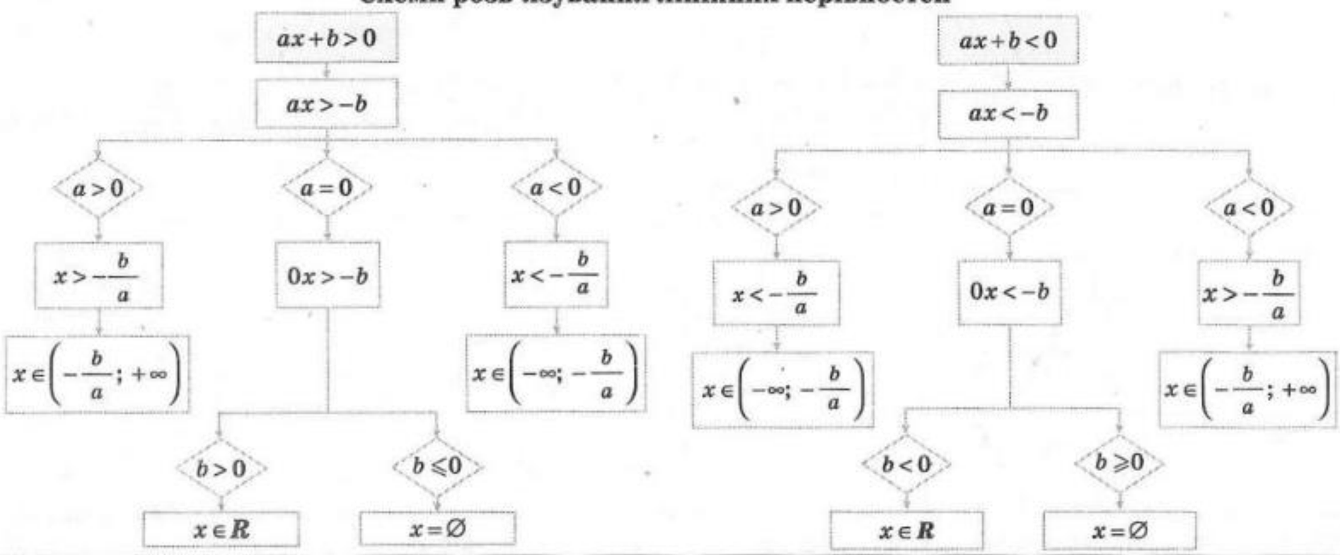
   Наприклад, нерівності $\dfrac{\sqrt{-x-1}}{\operatorname{arctg} x}\geqslant 1$ і $\sqrt{-x-1}\leqslant \operatorname{arctg} x$; $-7x>7$ і $x<-1$ є рівносильними.
4. Якщо обидві частини нерівності піднести до непарного натурального степеня й зберегти знак нерівності, то дістанемо нерівність, рівносильну даній.

   Наприклад, нерівності $\sqrt[3]{x^2+x}\leqslant\sqrt[3]{3-x}$ і $x^2+x\leqslant 3-x$ є рівносильними.
5. Якщо перша нерівність рівносильна другій, а друга — третій, то перша нерівність рівносильна третій

Лінійні нерівності з однією змінною

Лінійними нерівностями з однією змінною x називаються нерівності виду $ax+b>0$, $ax+b<0$, $ax+b\geqslant 0$, $ax+b\leqslant 0$

Схеми розв'язування лінійних нерівностей

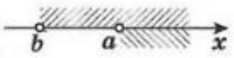
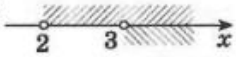
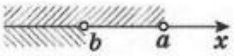
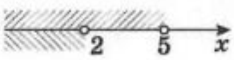
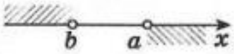
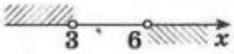


Системи лінійних нерівностей з однією змінною

Системи виду: $\begin{cases}a_1x>b_1,\\a_2x>b_2,\end{cases}$ або $\begin{cases}a_1x>b_1,\\a_2x<b_2,\end{cases}$ або $\begin{cases}a_1x<b_1,\\a_2x<b_2,\end{cases}$ або $\begin{cases}a_1x<b_1,\\a_2x>b_2\end{cases}$ називаються ***системами двох лінійних нерівностей з однією змінною***. (Замість знаків > і < можуть бути знаки $\geqslant$ і $\leqslant$.)

Щоб розв'язати систему нерівностей, треба кожну нерівність системи розв'язати окремо, а потім знайти розв'язок системи як переріз множин розв'язків цих нерівностей

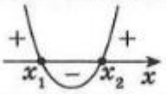
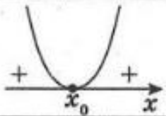
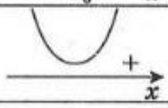
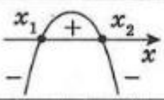
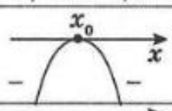
Можливі випадки розв'язування систем лінійних нерівностей

Система лінійних нерівностей $(a>b)$	Розв'язок та його геометрична ілюстрація	Приклад
$\begin{cases}x>a,\\x>b\end{cases}$	 $x\in(a;+\infty)$	$\begin{cases}x>3,\\x>2\end{cases}$  $x\in(3;+\infty)$
$\begin{cases}x<a,\\x<b\end{cases}$	 $x\in(-\infty;b)$	$\begin{cases}x<5,\\x<2\end{cases}$  $x\in(-\infty;2)$
$\begin{cases}x<a,\\x>b\end{cases}$	 4 $x\in(b;a)$	$\begin{cases}x<4,\\x>1\end{cases}$  $x\in(1;4)$
$\begin{cases}x>a,\\x<b\end{cases}$	 Розв'язків немає	$\begin{cases}x>6,\\x<3\end{cases}$  Розв'язків немає

Квадратичні нерівності

Квадратичними нерівностями називаються нерівності виду $f(x)>0$, $f(x)<0$, $f(x)\geqslant 0$, $f(x)\leqslant 0$, де $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

Розв'язки квадратичних нерівностей

Схема		Квадратична нерівність			
		$f(x)>0$	$f(x)<0$	$f(x)\geqslant 0$	$f(x)\leqslant 0$
$a>0,\ D>0$		$(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$	$(x_1;x_2)$	$(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$	$[x_1;x_2]$
$a>0,\ D=0$		$(-\infty;x_0)\cup(x_0;+\infty)$	$\varnothing$	$(-\infty;+\infty)$	x_0
$a>0,\ D<0$		$(-\infty;+\infty)$	$\varnothing$	$(-\infty;+\infty)$	$\varnothing$
$a<0,\ D>0$		$(x_1;x_2)$	$(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$	$[x_1;x_2]$	$(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$
$a<0,\ D=0$		$\varnothing$	$(-\infty;x_0)\cup(x_0;+\infty)$	x_0	$(-\infty;+\infty)$
$a<0,\ D<0$		$\varnothing$	$(-\infty;+\infty)$	$\varnothing$	$(-\infty;+\infty)$

Нерівності виду $f(x)g(x)>0$ і $f(x)g(x)<0$

Нерівність $f(x)g(x)>0$ рівносильна двом системам: $\begin{cases}f(x)>0,\\g(x)>0\end{cases}$ і $\begin{cases}f(x)<0,\\g(x)<0.\end{cases}$

Нерівність $f(x)g(x)<0$ рівносильна двом системам: $\begin{cases}f(x)<0,\\g(x)>0\end{cases}$ і $\begin{cases}f(x)>0,\\g(x)<0\end{cases}$

Розв'язування подвійних нерівностей

Подвійна нерівність $f(x)<g(x)<h(x)$ рівносильна системі нерівностей $\begin{cases} f(x)<g(x), \\ g(x)<h(x). \end{cases}$

Приклад розв'язання: $-3<2x-1\leqslant 3$, $\begin{cases} 2x-1>-3, \\ 2x-1\leqslant 3; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x>-2, \\ 2x\leqslant 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x>-1, \\ x\leqslant 2. \end{cases}$

Тоді $x\in(-1;\ 2]$ (рисунок). *Відповідь.* $(-1;\ 2]$

Дробові нерівності

Нерівність $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$ рівносильна нерівності $f(x)g(x)>0$.

Нерівність $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$ рівносильна нерівності $f(x)g(x)<0$.

Нерівність $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0$ $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\leqslant 0\right)$ рівносильна двом системам нерівностей:

$\begin{cases} f(x)\geqslant 0, \\ g(x)>0 \end{cases}$ і $\begin{cases} f(x)\leqslant 0, \\ g(x)<0 \end{cases}$ $\left(\begin{cases} f(x)\geqslant 0, \\ g(x)<0 \end{cases}\text{ і }\begin{cases} f(x)\leqslant 0, \\ g(x)>0 \end{cases}\right)$.

Приклад розв'язання: $\dfrac{x-2}{x-7}>0$.

$\begin{cases} x-2>0, \\ x-7>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>2, \\ x>7. \end{cases}$ Тоді $x\in(7;\ +\infty)$ (рис.1). $\begin{cases} x-2<0, \\ x-7<0; \end{cases}$ $\begin{cases} x<2, \\ x<7. \end{cases}$

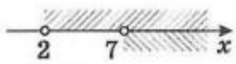


Рис. 1

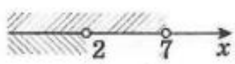


Рис. 2

Тоді $x\in(-\infty;\ 2)$ (рис. 2). *Відповідь:* $(-\infty;\ 2)\cup(7;\ +\infty)$

Нерівності з модулем

Найпростіші нерівності з модулем

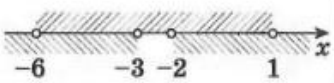
$|x-b|<a$:
- $a\leqslant 0$ → Розв'язків немає
- $a>0$ → $b-a<x<b+a$

$|x-b|\geqslant a$:
- $a\leqslant 0$ → $x\in R$
- $a>0$ → $x\leqslant b-a$ або $x\geqslant b+a$

Нерівність виду $|f(x)|<a$, де $a\geqslant 0$

Нерівність $|f(x)|<a$, де $a\geqslant 0$, рівносильна подвійній нерівності $-a<f(x)<a$, або системі $\begin{cases} f(x)>-a, \\ f(x)<a. \end{cases}$

Приклад розв'язання: $|x^2+5x|<6$, $-6<x^2+5x<6$, $\begin{cases} x^2+5x<6, \\ x^2+5x>-6; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+5x-6<0, \\ x^2+5x+6>0; \end{cases}$



$\begin{cases} x\in(-6;\ 1), \\ x\in(-\infty;\ -3)\cup(-2;\ +\infty); \end{cases}$ $x\in(-6;\ -3)\cup(-2;\ 1)$ (рисунок). *Відповідь.* $(-6;\ -3)\cup(-2;\ 1)$

Нерівність виду $|f(x)|>a$, де $a\geqslant 0$

Нерівність $|f(x)|>a$, де $a\geqslant 0$, рівносильна об'єднанню нерівностей $\left[\begin{array}{l} f(x)<-a, \\ f(x)>a. \end{array}\right.$

Приклад розв'язання: $|3-x|>2$, $\left[\begin{array}{l} 3-x>2, \\ 3-x<-2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x<1, \\ x>5. \end{array}\right.$ $x\in(-\infty;\,1)\cup(5;\,+\infty)$.

Відповідь. $(-\infty;\,1)\cup(5;\,+\infty)$

Нерівність виду $|f(x)|>g(x)$

Нерівність $|f(x)|>g(x)$ рівносильна об'єднанню нерівностей $\left[\begin{array}{l} f(x)>g(x), \\ f(x)<-g(x). \end{array}\right.$

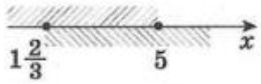
Приклад розв'язання: $|3x-2|>2x+1$, $\left[\begin{array}{l} 3x-2>2x+1, \\ 3x-2<-2x-1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x>3, \\ 5x<1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x>3, \\ x<\frac{1}{5}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x>3, \\ x<0{,}2. \end{array}\right.$ $x\in(-\infty;\,0{,}2)\cup(3;\,+\infty)$.

Відповідь. $(-\infty;\,0{,}2)\cup(3;\,+\infty)$

Нерівність виду $|f(x)|<g(x)$

Нерівність $|f(x)|<g(x)$ рівносильна системі $\left\{\begin{array}{l} f(x)<g(x), \\ f(x)>-g(x). \end{array}\right.$

Приклад розв'язання: $|2x-5|\leqslant x$, $\left\{\begin{array}{l} 2x-5\leqslant x, \\ 2x-5\geqslant -x; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x\leqslant 5, \\ 3x\geqslant 5; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x\leqslant 5, \\ x\geqslant 1\frac{2}{3}. \end{array}\right.$



Тоді $x\in\left[1\frac{2}{3};\,5\right]$ (рисунок). *Відповідь.* $\left[1\frac{2}{3};\,5\right]$

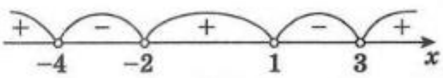
Розв'язування раціональних нерівностей методом інтервалів

Щоб розв'язати нерівність $f(x)>0$ $(f(x)<0)$, де $f(x)=\dfrac{(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_m)}{(x-a_{m+1})(x-a_{m+2})\cdot\ldots\cdot(x-a_n)}$, треба:

1) зобразити числа a_1, a_2, ..., a_n на координатній прямій (ці числа, розташовані в порядку зростання, розіб'ють координатну пряму на $n+1$ проміжків, на яких функція $f(x)$ зберігає свій знак, тобто якщо a_l і a_k — сусідні точки, то для $x\in(a_l,\,a_k)$ функція зберігає знак);

2) визначити знаки функції $f(x)$ на кожному з проміжків.

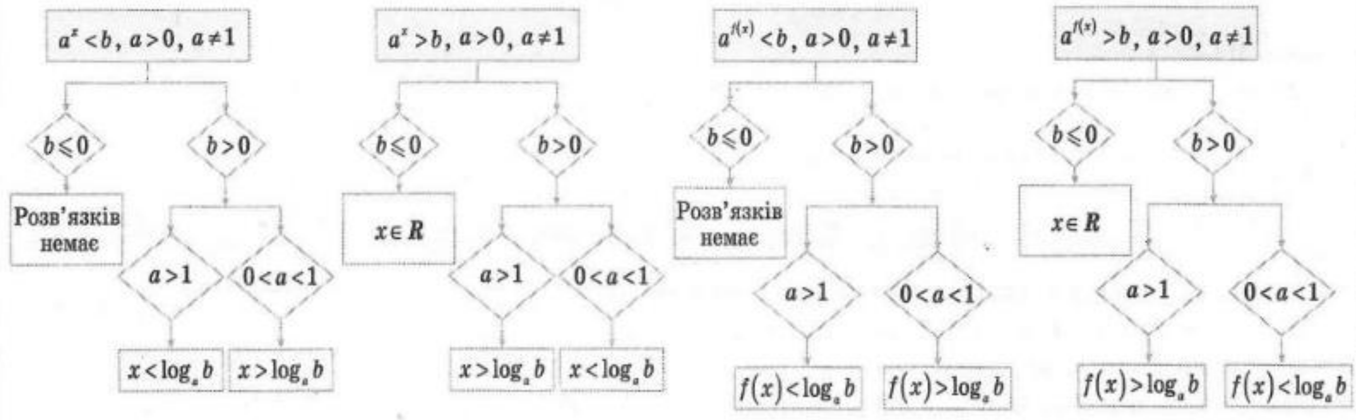
Приклад розв'язання: $(x+4)(x+2)(x-1)(x-3)<0$. Позначимо на координатній прямій нулі функції $(x+4)(x+2)(x-1)(x-3)=0$, знайдемо знак функції на кожному проміжку.



Відповідь. $(-4;\,-2)\cup(1;\,3)$

Показникові нерівності

Найпростіші показникові нерівності



Нерівність виду $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ $\left(a^{f(x)}<a^{g(x)}\right)$, $a>1$

Нерівність $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ $\left(a^{f(x)}<a^{g(x)}\right)$, якщо $a>1$, рівносильна нерівності $f(x)>g(x)$ $\left(f(x)<g(x)\right)$.

Приклад розв'язання: $7^{8-x^2}\leqslant7^{2x}$; $8-x^2\leqslant2x$; $-x^2-2x+8\leqslant0$; $x^2+2x-8\geqslant0$; $(x+4)(x-2)\geqslant0$. Звідси $x\in(-\infty;-4]\cup[2;+\infty)$. *Відповідь.* $(-\infty;-4]\cup[2;+\infty)$

Нерівність виду $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ $\left(a^{f(x)}<a^{g(x)}\right)$, $0<a<1$

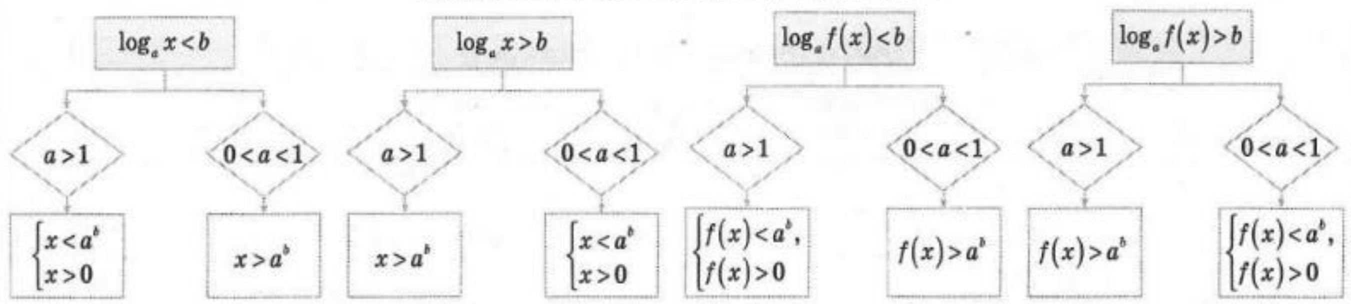
Нерівність $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ $\left(a^{f(x)}<a^{g(x)}\right)$, якщо $0<a<1$, рівносильна нерівності $f(x)<g(x)$ $\left(f(x)>g(x)\right)$.

Приклад розв'язання: $\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)^{x^2-2}\geqslant\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)^{x}$; $x^2-2\leqslant x$; $x^2-x-2\leqslant0$; $(x-2)(x+1)\leqslant0$.

Звідси $x\in[-1;2]$. *Відповідь.* $[-1;2]$

Логарифмічні нерівності

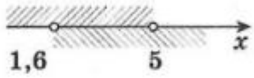
Найпростіші логарифмічні нерівності



Нерівність виду $\log_a f(x) < \log_a g(x)$

Нерівність $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases}$ якщо $a > 1$, і системі $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \end{cases}$ якщо $0 < a < 1$.

Приклад розв'язання: $\log_8(5x-8) < \log_8(2x+7)$; $\begin{cases} 5x-8 < 2x+7, \\ 5x-8 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x < 15, \\ 5x > 8; \end{cases}$



$\begin{cases} x < 5, \\ x > 1{,}6. \end{cases}$ Тоді $x \in (1{,}6;\ 5)$ (рисунок). *Відповідь.* $(1{,}6;\ 5)$

Метод інтервалів (узагальнений)

Використовується для розв'язування нерівностей $f(x) > 0$; $f(x) < 0$; $f(x) \geqslant 0$; $f(x) \leqslant 0$. Метод ґрунтується на тому, що неперервна на проміжку функція (рис. 1) може змінювати знак тільки в тих точках, де її значення дорівнює нулю (але може й не змінювати).

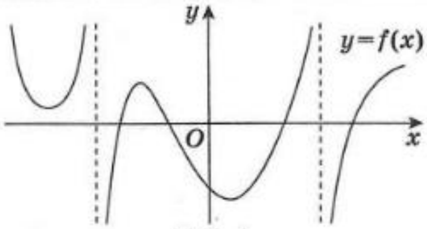


Рис. 1

Розв'язуючи нерівність ***методом інтервалів***, потрібно:

1) знайти область визначення функції $y = f(x)$;
2) знайти значення x, при яких функція дорівнює нулю (знайти нулі функції): $f(x) = 0$;
3) розбити область визначення на проміжки, у яких кожний із кінців є коренем рівняння $f(x) = 0$ або кінцевою точкою проміжку визначення функції $y = f(x)$;
4) визначити знак $f(x)$ на кожному з утворених проміжків;
5) об'єднати проміжки, на яких функція $f(x)$ задовольняє нерівність, у множину розв'язків.

Приклад розв'язання: $(3x-6)\log_{0,5} x > 0$. Нехай $y = (3x-6)\log_{0,5} x$. $D(y) = (0;\ +\infty)$. Знайдемо нулі функції:

$(3x-6)\log_{0,5} x = 0$; $\left[\begin{array}{l} 3x-6=0, \\ \log_{0,5} x = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=1. \end{array}\right.$ Розіб'ємо область визначення функції на проміжки точками 2 й 1 і знайдемо знаки функції на кожному проміжку. Отже, $x \in (1;\ 2)$ (рис. 2). *Відповідь.* $(1;\ 2)$

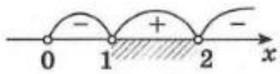


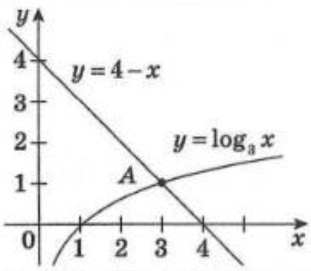
Рис. 2

Графічний спосіб розв'язування нерівностей з однією змінною

Для графічного розв'язання нерівності $f(x) > g(x)$ потрібно побудувати графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ та вибрати ті проміжки осі абсцис, на яких графік функції $y = f(x)$ розташований вище графіка функції $y = g(x)$.

Приклад розв'язання: $\log_3 x \leqslant 4 - x$ (розв'язання наведено на рисунку).

Відповідь. $(0;\ 3]$



Тригонометричні нерівності

Розв'язування нерівностей $\sin t > a$, $\sin t < a$

Нерівність	Розв'язання ($n \in Z$)		
$\sin t > a$	$a < -1$	$-1 \leqslant a < 1$	$a \geqslant 1$
	$t \in R$	$\arcsin a + 2\pi n < t < \pi - \arcsin a + 2\pi n$	$\varnothing$
$\sin t < a$	$a \leqslant -1$	$-1 < a \leqslant 1$	$a > 1$
	$\varnothing$	$-\pi - \arcsin a + 2\pi n < t < \arcsin a + 2\pi n$	$t \in R$

Розв'язування нерівностей $\cos t > b$, $\cos t < b$

Нерівність	Розв'язання ($n \in Z$)		
$\cos t > b$	$b < -1$	$-1 \leqslant b < 1$	$b \geqslant 1$
	$t \in R$	$-\arccos b + 2\pi n < t < \arccos b + 2\pi n$	$\varnothing$
$\cos t < b$	$b \leqslant -1$	$-1 < b \leqslant 1$	$b > 1$
	$\varnothing$	$\arccos b + 2\pi n < t < 2\pi - \arccos b + 2\pi n$	$t \in R$

Розв'язування нерівностей $\operatorname{tg} t > a$, $\operatorname{tg} t < a$

Нерівність	Розв'язання
$\operatorname{tg} t > a$, $a \in R$	$\operatorname{arctg} a + \pi n < t < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$
$\operatorname{tg} t < a$, $a \in R$	$-\frac{\pi}{2} + \pi n < t < \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in Z$

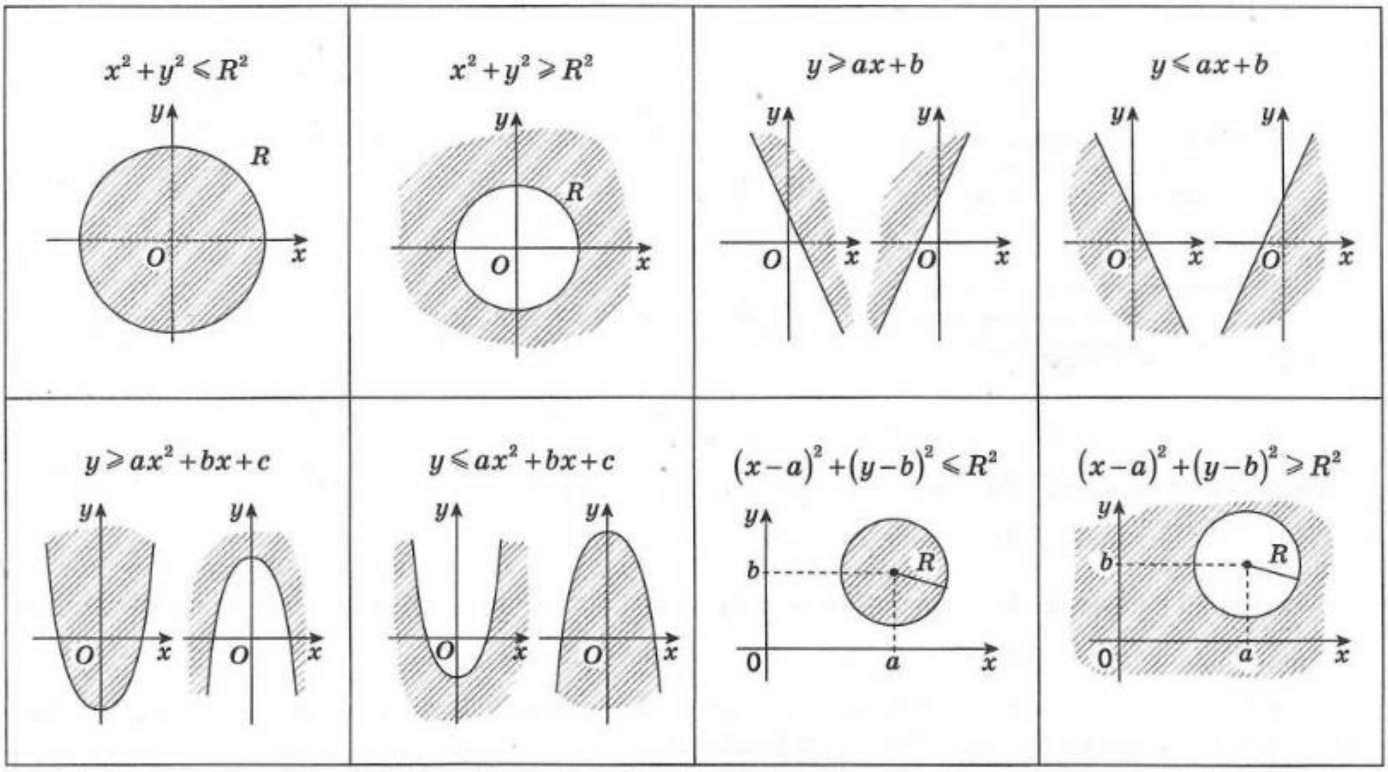
Нерівності з двома змінними

Розв'язок і графік нерівності

Розв'язком нерівності $f(x, y) > 0$ $\left(f(x, y) < 0,\ f(x, y) \geqslant 0,\ f(x, y) \leqslant 0\right)$ називається впорядкована пара чисел, що перетворює її в правильну числову нерівність.

Графіком нерівності з двома змінними x і y називається множина всіх точок координатної площини з координатами $(x; y)$, де кожна пара $(x; y)$ є розв'язком даної нерівності

Графіки деяких нерівностей



Графічний спосіб розв'язування систем нерівностей із двома змінними

Щоб побудувати на координатній площині множину розв'язків системи нерівностей, потрібно:

1) виконати рівносильні перетворення системи так, щоб зручно було будувати графіки всіх нерівностей системи;
2) накреслити ці графіки й знайти перетин областей.

Перетин областей являє собою множину розв'язків системи нерівностей.

Система $\begin{cases} y \leqslant f(x), \\ y \geqslant g(x) \end{cases}$ має множину розв'язків, а саме — множину точок, що належать до заштрихованої області (рис. 1).

Приклад розв'язання.

Знайдемо множину розв'язків системи $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ x + y \geqslant 0. \end{cases}$

Множиною розв'язків першої нерівності є круг із радіусом 2 і центром у початку координат. Множиною розв'язків другої нерівності є півплощина. Множиною розв'язків системи є перетин цих множин, тобто півкруг (рис. 2)

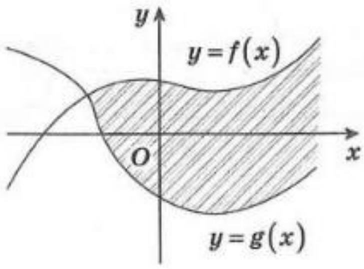


Рис. 1

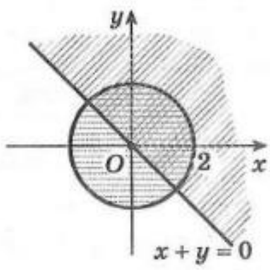


Рис. 2

Рівняння і нерівності з параметрами, їх системи

Розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами та їх систем

Рівняння і нерівності з параметрами та їх системи розв'язують як звичайні рівняння, нерівності чи системи доти, поки всі перетворення, необхідні для розв'язування, можна виконати однозначно. Коли це стає неможливим, розглядають кілька випадків розв'язування залежно від значень параметра. Хід розв'язування доцільно ілюструвати схемами.

Наприклад: $5ax = 3a + 2x$; $5ax - 2x = 3a$; $(5a-2)x = 3a$;

1) $5a - 2 \neq 0$, тобто $a \neq 0{,}4$, тоді $x = \dfrac{3a}{5a-2}$;

2) $5a - 2 = 0$, тобто $a = 0{,}4$, тоді $0x = 3a$; $0x = 3 \cdot 0{,}4$; $0x = 1{,}2$ — рівняння не має розв'язків.

Відповідь: якщо $a \neq 0{,}4$, то $x = \dfrac{3a}{5a-2}$; якщо $a = 0{,}4$, розв'язків немає.

Одним із найпростіших і найбільш уживаних способів розв'язування рівнянь (нерівностей та їх систем) з параметрами є ***графічний спосіб***.

Розділ III. Функції та графіки

Числові послідовності

Означення числової послідовності

Якщо кожному натуральному числу n поставлено у відповідність дійсне число a_n, то кажуть, що задано ***числову послідовність***: a_1; a_2; a_3; ...; a_n; ... .

Отже, числова послідовність — функція натурального аргумента.

Послідовність часто задають за допомогою ***формули n-го члена***, тобто формули, що дозволяє визначати члени послідовності за їхніми номерами.

Послідовності бувають ***скінченні*** й ***нескінченні***.

Арифметична прогресія

Арифметичною прогресією називається послідовність a_1; a_2; a_3; ..., кожний наступний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, доданому до того самого числа d, яке називається ***різницею арифметичної прогресії***: $a_{n+1}=a_n+d$, $n\in N$.

В арифметичній прогресії n-й член визначається за формулою $a_n=a_1+d(n-1)$, де n — номер члена, a_n — n-й член, a_1 — перший член, d — різниця прогресії.

Наприклад, якщо $a_1=4$, $d=4$, то $a_{100}=a_1+99d=1+99\cdot 4=397$.

Характеристична властивість арифметичної прогресії: $a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$.

Якщо всі члени якоїсь послідовності, починаючи з другого, задовольняють умову $a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, то ця послідовність є арифметичною прогресією.

Сума перших n членів арифметичної прогресії: $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ або $S_n=\dfrac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$.

Наприклад, $1+2+3+\ldots+100=\dfrac{1+100}{2}\cdot 10=505$; $1+3+5+\ldots+(2n-1)=\dfrac{2\cdot 1+2(n-1)}{2}\cdot n=(1+n-1)\cdot n=n^2$

Геометрична прогресія

Геометричною прогресією називається послідовність b_1; b_2; b_3; ...; b_n; ..., кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме число q $(q\neq 0,\ |q|\neq 1,\ b_1\neq 0)$, яке називається ***знаменником геометричної прогресії***:

$$b_{n+1}=b_n\cdot q,\ \text{де}\ b_1\neq 0,\ q\neq 0,\ |q|\neq 1,\ n\in N.$$

У геометричній прогресії n-й член визначається за формулою $b_n=b_1q^{n-1}$, де n — номер члена, b_n — n-й член, b_1 — перший член, q — знаменник прогресії.

Наприклад, якщо $b_1=64$, $q=\dfrac{1}{2}$, то $b_7=b_1q^6=64\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^6=1$.

Характеристична властивість геометричної прогресії: $|b_n|=\sqrt{b_{n-1}\cdot b_{n+1}}$ (або $b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$).

Якщо всі члени числової послідовності, починаючи з другого, задовольняють умову $|b_n|=\sqrt{b_{n-1}\cdot b_{n+1}}$ (або $b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$), то ця послідовність є геометричною прогресією.

Суму n перших членів геометричної прогресії можна знайти за формулою

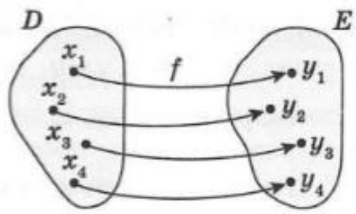
$$S_n=b_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q},\ q\neq 1.$$

Наприклад, $\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}+\left(-\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{32}+\left(-\frac{1}{64}\right)=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{64}\right)}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{63}{64}\cdot\frac{2}{3}=\frac{21}{64}$

Властивості функцій

Поняття функції

Залежність змінної y від змінної x називається ***функцією***, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y (рисунок). Цю залежність позначають або f, або $f(x)$, або $y=f(x)$.



Змінна x називається ***незалежною змінною***, або ***аргументом функції***, а змінна y — ***залежною змінною***, або ***функцією***.

Областю визначення функції $y=f(x)$, заданої формулою, називається множина значень x, при яких формула має зміст (усі дії, зазначені у формулі, можна виконати).

Позначення: $D(f)$.

Наприклад, якщо $f(x)=\frac{1}{x-1}$, то $D(f)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$; якщо $y=x^3+x^2$, то $D(y)=R$.

Усі значення, яких набуває залежна змінна при всіх значеннях аргумента з області визначення, утворюють область значень функції. Позначення: $E(f)$.

Наприклад, якщо $f(x)=\frac{1}{x}$, то $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, $E(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; якщо $f(x)=x^2$, то $D(f)=R$, $E(f)=[0;+\infty)$.

Графік функції

Графіком функції $y=f(x)$ називається множина всіх точок площини з координатами $(x;f(x))$, де перша координата «пробігає» всю область визначення функції $y=f(x)$, а друга координата — це відповідне значення функції в точці x

Способи задавання функції

Табличний спосіб — функція задається таблицею.

Графічний спосіб — функція задається множиною точок координатної площини.

Аналітичний спосіб — функція задається формулою.

Правила знаходження області визначення функцій, заданих аналітично

Функція	Область визначення	Функція	Область визначення
$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$	$(-\infty;+\infty)$	$y=\log_{f(x)}g(x)$	$\begin{cases} g(x)>0, \\ f(x)>0, \\ f(x)\neq 1 \end{cases}$
$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени	$g(x)\neq 0$	$y=\operatorname{tg}(f(x))$	$f(x)\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$
$y=\sqrt[2k]{f(x)}$, $k\in N$	$f(x)\geqslant 0$	$y=x^{\alpha}$, де α: — натуральне число — ціле від'ємне число або нуль — додатне неціле число — від'ємне неціле число	 R $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ $[0;+\infty)$ $(0;+\infty)$

Парні й непарні функції

Функція $y=f(x)$ називається ***парною***, якщо для будь-якого $x\in D(y)$ виконується рівність $f(-x)=f(x)$, при цьому $-x\in D(y)$.

Графік парної функції є симетричним відносно осі Oy.

Наприклад, функція $f(x)=-x^4+x^2$ є парною, оскільки $f(-x)=-(-x)^4+(-x)^2=-x^4+x^2=f(x)$ для всіх $x\in R$ (рис. 1).

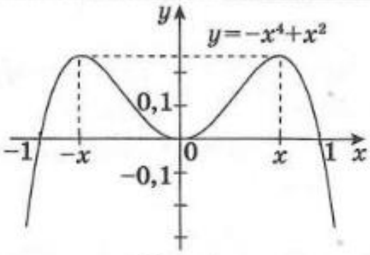


Рис. 1

Функція $y=f(x)$ називається ***непарною***, якщо для будь-якого $x\in D(y)$ виконується рівність $f(-x)=-f(x)$, при цьому $-x\in D(y)$.

Графік непарної функції є симетричним відносно початку координат.

Наприклад, $f(x)=x^5-x^3$ — непарна, оскільки $f(-x)=(-x)^5-(-x)^3=-x^5+x^3=-(x^5-x^3)=-f(x)$ для всіх $x\in R$. Графік функції $f(x)=x^5-x^3$ наведено на рис. 2.

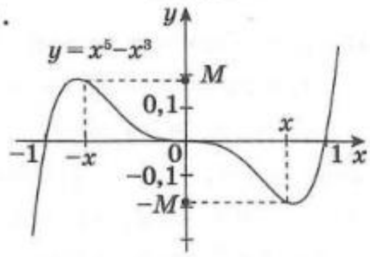


Рис. 2

Існують функції, які не є ні парними, ні непарними.

Наприклад, функції $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[2k]{x}$, $k\in N$; $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$; $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$; $y=\{x\}$ не є ні парними, ні непарними.

Єдина функція, задана на множині R, є й парною, й непарною, — це функція $y=0$ (рис. 3)

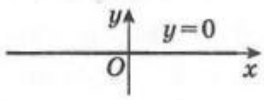
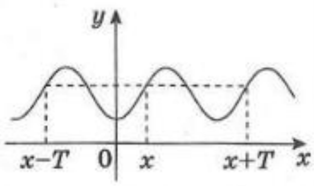


Рис. 3

Періодичні функції

Функція $y=f(x)$ називається ***періодичною*** з періодом $T\neq 0$, якщо для будь-якого x з області визначення виконується рівність: $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$ (рисунок).

Періодом функції прийнято називати найменший із додатних періодів



Зростаючі і спадні функції

Функція $y=f(x)$ називається ***зростаючою*** на певній множині X, якщо для будь-яких $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$, або $y_2 > y_1$ (рис. 1).

Функція $y=f(x)$ називається ***спадною*** на певній множині X, якщо для будь-яких $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$, або $y_2 < y_1$ (рис. 2).

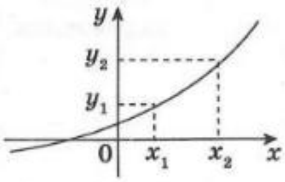


Рис. 1

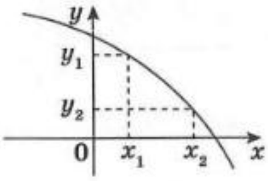
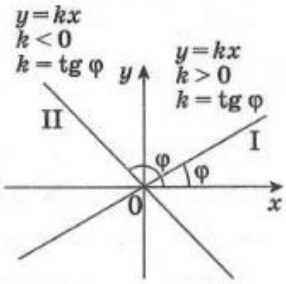


Рис. 2

Властивості деяких функцій та їхні графіки

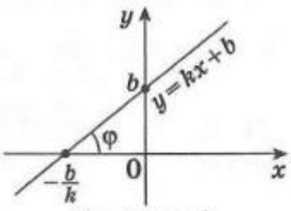
Пряма пропорційність $y=kx$, $k\neq 0$

1. Область визначення — R.
2. Область значень — R.
3. Функція непарна.
4. Якщо $x=0$, то $y=0$.
5. Якщо $k>0$, то функція зростає на множині R (рисунок, графік I).
6. Якщо $k<0$, то функція спадає на множині R (рисунок, графік II).
7. Графік прямої пропорційності — пряма, що проходить через початок координат



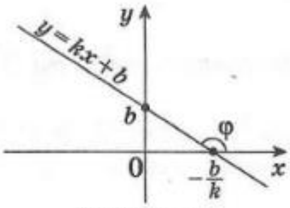
Лінійна функція $y=kx+b$, $k\in R$, $b\in R$

1. Область визначення — R.
2. Область значень — R, якщо $k\neq 0$; $\{b\}$, якщо $k=0$.
3. Якщо $k\neq 0$, $b\neq 0$, то функція не є ні парною, ні непарною; якщо $k=0$ — функція парна; якщо $b=0$, $k\neq 0$ — функція непарна; якщо $k=0$, $b=0$ — функція і парна, і непарна.
4. Якщо $x=0$, то $y=b$; якщо $x=-\dfrac{b}{k}$, функція $y=0$.
5. Якщо $k>0$, то функція зростає на множині R (рис. 1); якщо $k<0$, то функція спадає на множині R (рис. 2); якщо $k=0$, то функція є сталою, $y=b$ (рис. 3).
6. Графік лінійної функції — пряма, що утворює з віссю абсцис кут φ, тангенс якого дорівнює k.
7. Якщо $b=0$, графік лінійної функції проходить через початок координат і є графіком прямої пропорційності



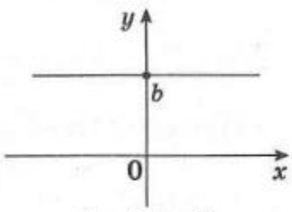
$k=\text{tg}\,\varphi>0$

Рис. 1



$k=\text{tg}\,\varphi<0$

Рис. 2



$k=\text{tg}\,\varphi=0$

Рис. 3

Обернена пропорційність $y=\frac{k}{x}$, $k\in R$, $k\neq 0$

1. Область визначення — $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$.
2. Область значень — $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$.
3. Функція $y=\frac{k}{x}$ непарна.
4. Якщо $k>0$, то функція спадає на інтервалах $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$ (рис. 1). Якщо $k<0$, то на інтервалах $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$ функція зростає (рис. 2).
5. Графік функції $y=\frac{k}{x}$ не перетинає осі координат.
6. Якщо $k>0$, $x>0$ то функція є додатною; якщо $k>0$, $x<0$ — від'ємною. Якщо $k<0$, $x>0$ то функція від'ємна; якщо $k<0$, $x<0$ — додатна.
7. Графік оберненої пропорційності — ***гіпербола***

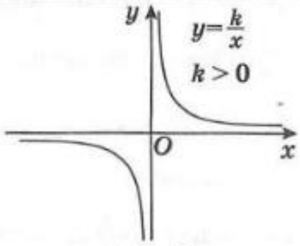


Рис. 1

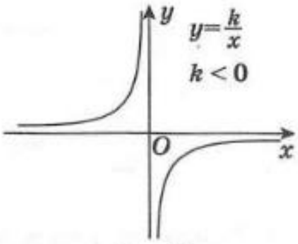


Рис. 2

Дробово-лінійна функція $y=\frac{ax+b}{cx+d}$

1. Область визначення — $\left(-\infty;\ -\frac{d}{c}\right)\cup\left(-\frac{d}{c};\ +\infty\right)$.
2. Область значень — $\left(-\infty;\ \frac{a}{c}\right)\cup\left(\frac{a}{c};\ +\infty\right)$.
3. Точки перетину з осями координат: $\left(-\frac{b}{a};\ 0\right)$ і $\left(0;\ \frac{b}{d}\right)$.
4. Функція спадає на $\left(-\infty;\ -\frac{d}{c}\right)$ і $\left(-\frac{d}{c};\ +\infty\right)$, якщо $ad<bc$ (рис. 1).
5. Функція зростає на $\left(-\infty;\ -\frac{d}{c}\right)$ і $\left(-\frac{d}{c};\ +\infty\right)$, якщо $ad>bc$ (рис. 2).
6. Графік функції — ***гіпербола***

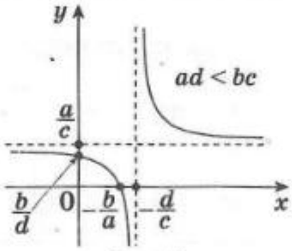


Рис. 1

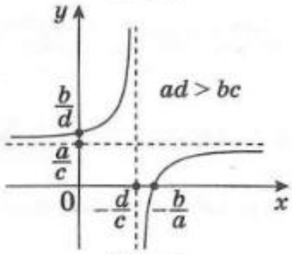
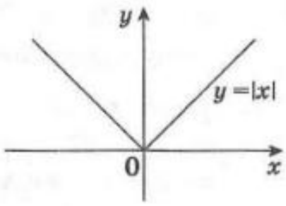


Рис. 2

Функція $y=|x|$

1. Область визначення — R.
2. Область значень — $[0;\ +\infty)$.
3. Функція парна.
4. Якщо $x<0$, то функція спадає; якщо $x>0$, то функція зростає.
5. Графік функції — об'єднання двох променів: бісектрис першої та другої координатних чвертей (рисунок)



Квадратична функція $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$

1. Область визначення — R.
2. Область значень: якщо $a>0$, то $\left[-\frac{b^2-4ac}{4a};+\infty\right)$; якщо $a<0$, то $\left(-\infty;-\frac{b^2-4ac}{4a}\right]$.
3. Якщо $b\neq 0$, то функція не є ні парною, ні непарною; якщо $b=0$, то функція $y=ax^2+c$ є парною.
4. Якщо $a>0$, то функція спадає на проміжку $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right]$ і зростає на проміжку $\left[-\frac{b}{2a};+\infty\right)$; $x_0=-\frac{b}{2a}$ — точка мінімуму (рис. 1). Якщо $a<0$, то функція зростає на проміжку $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right]$ і спадає на проміжку $\left[-\frac{b}{2a};+\infty\right)$; $x_0=-\frac{b}{2a}$ — точка максимуму (рис. 2).
5. Графік функції перетинає осі координат у точках $(0;c)$, $(x_1;0)$, $(x_2;0)$, де $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
6. Графік функції — ***парабола***, вітки якої напрямлені вгору, якщо $a>0$, і вниз, якщо $a<0$; координати вершини $\left(-\frac{b}{2a};-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$; вісь симетрії графіка $x=-\frac{b}{2a}$

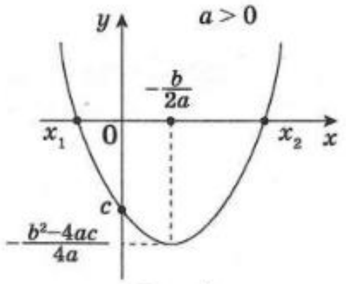


Рис. 1

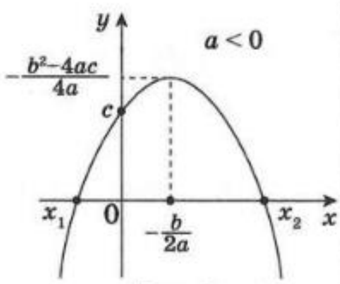


Рис. 2

Степенева функція $y=x^n$

Властивості функції $y=x^n$, де $n\in N$.

1. Область визначення — R.
2. Область значень — якщо $n=2k$, $k\in N$, то $[0;+\infty)$; якщо $n=2k-1$, $k\in N$, то R.
3. Якщо $n=2k$, $k\in N$, то функція парна; якщо $n=2k-1$, $k\in N$, то функція непарна.
4. Графік функції проходить через початок координат.

   Графік функції є симетричним відносно осі Oy, якщо $n=2k$, $k\in N$ (рис. 1); симетричним відносно початку координат, якщо $n=2k-1$, $k\in N$ (рис. 2).
5. Якщо $n=2k$, $k\in N$, то функція спадає на проміжку $(-\infty;0]$ і зростає на проміжку $[0;+\infty)$. Якщо $n=2k-1$, $k\in N$, то функція зростає на множині R

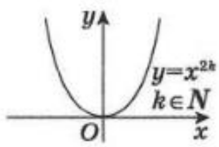


Рис. 1

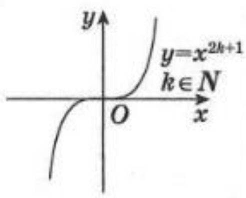


Рис. 2

Властивості функції $y=x^{-n}$, де $n\in N$

1. Область визначення — $(-\infty;\,0)\cup(0;\,+\infty)$.
2. Область значень: $(0;\,+\infty)$, якщо $n=2k$, $k\in N$; $(-\infty;\,0)\cup(0;\,+\infty)$, якщо $n=2k-1$, $k\in N$.
3. Якщо $n=2k$, $k\in N$, то функція парна, графік є симетричним відносно осі Oy (рис. 1); якщо $n=2k-1$, $k\in N$, то функція непарна, її графік симетричний відносно початку координат (рис. 2).

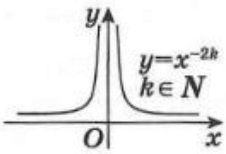


Рис. 1

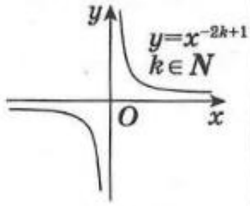


Рис. 2

4. Точок перетину з осями координат графік функції не має.
5. Якщо $n=2k$, $k\in N$, то функція зростає на проміжку $(-\infty;\,0)$ і спадає на проміжку $(0;\,+\infty)$; якщо $n=2k-1$, $k\in N$, то функція спадає на кожному з проміжків $(-\infty;\,0)$, $(0;\,+\infty)$

Властивості функції $y=x^{\alpha}$, де α — неціле число

1. Область визначення: $[0;\,+\infty)$, якщо $\alpha>0$; $(0;\,+\infty)$, якщо $\alpha<0$.
2. Область значень: $[0;\,+\infty)$, якщо $\alpha>0$; $(0;\,+\infty)$, якщо $\alpha<0$.
3. Функція не є ні парною, ні непарною.
4. Якщо $\alpha>0$, то графік функції проходить через початок координат (рис. 1, 2); якщо $\alpha<0$, то графік функції не перетинає осей координат (рис. 3).
5. Якщо $\alpha>0$, то функція зростає на всій області визначення; якщо $\alpha<0$, то функція спадає на всій області визначення

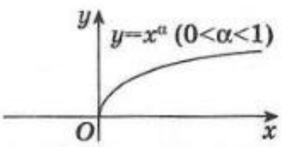


Рис. 1

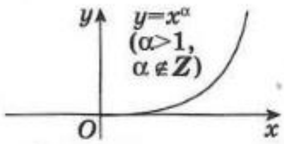


Рис. 2

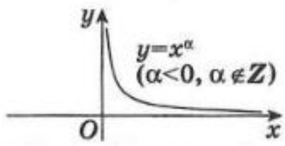


Рис. 3

Показникова функція $y=a^x$, $a>0$, $a\neq1$

1. Область визначення — R.
2. Область значень — $(0;\,+\infty)$.
3. Функція не є ні парною, ні непарною.
4. Графік функції перетинає вісь Oy у точці $(0;\,1)$, вісь Ox не перетинає.
5. Якщо $a>1$, то функція зростає на множині R (рис. 1); якщо $0<a<1$, то функція спадає на множині R (рис. 2).

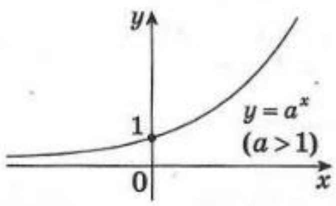


Рис. 1

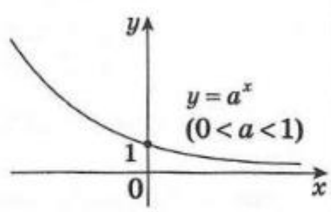


Рис. 2

6. Коли $a>1$, то $y>1$, якщо $x>0$; $0<y<1$, якщо $x<0$. Коли $0<a<1$, то $y>1$, якщо $x<0$; $0<y<1$, якщо $x>0$

Функція $y=\sqrt[n]{x}$, $n\geqslant 2$, $n\in N$

1. Область визначення: $[0;+\infty)$, якщо $n=2k$, $k\in N$; R, якщо $n=2k+1$, $k\in N$.
2. Область значень: $[0;+\infty)$, якщо $n=2k$, $k\in N$; R, якщо $n=2k+1$, $k\in N$.
3. Якщо $n=2k$, $k\in N$, то функція не є ні парною, ні непарною (рис. 1); якщо $n=2k+1$, $k\in N$, то функція непарна і її графік є симетричним відносно початку координат (рис. 2).
4. Функція зростає на всій області визначення.
5. Графік функції проходить через початок координат

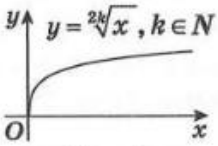


Рис. 1

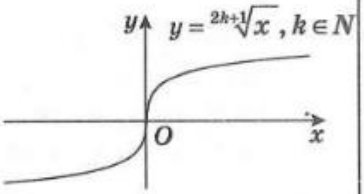


Рис. 2

Логарифмічна функція $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$

1. Область визначення — $(0;+\infty)$.
2. Область значень — R.
3. Функція не є ні парною, ні непарною.
4. Графік функції перетинає вісь Ox у точці $(1;0)$, вісь Oy не перетинає.
5. Якщо $a>1$, то функція зростає на всій області визначення (рис. 1); якщо $0<a<1$, то функція спадає на всій області визначення (рис. 2).

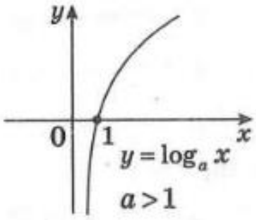


Рис. 1

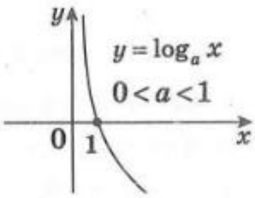


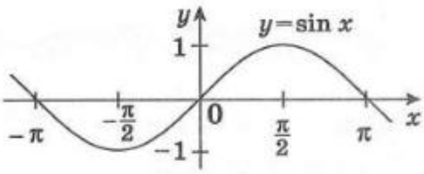
Рис. 2

6. Коли $a>1$, то $y>0$, якщо $x>1$; $y<0$, якщо $0<x<1$. Коли $0<a<1$, то $y>0$, якщо $0<x<1$; $y<0$, якщо $x>1$

Властивості тригонометричних функцій, графіки цих функцій

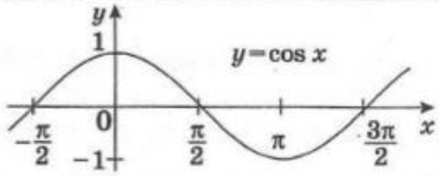
Функція $y=\sin x$

1. Область визначення — R.
2. Область значень — $[-1;1]$.
3. Функція непарна.
4. Функція періодична ($T=2\pi$).
5. Графік функції перетинає вісь Oy у точці $(0;0)$, а вісь Ox — у точках $(\pi k;0)$, де $k\in Z$ (рисунок).



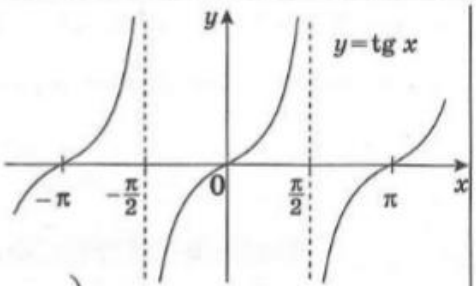
6. $y>0$, якщо $x\in(2\pi k;\pi+2\pi k)$, $k\in Z$; $y<0$, якщо $x\in(\pi+2\pi k;2\pi+2\pi k)$, $k\in Z$.
7. Функція зростає на проміжках $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in Z$, і спадає на проміжках $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in Z$.
8. $y_{max}=1$ у точках $x_{max}=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$; $y_{min}=-1$ у точках $x_{min}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$

Функція $y=\cos x$



1. Область визначення — $\boldsymbol{R}$.
2. Область значень — $[-1;1]$.
3. Функція парна.
4. Функція періодична ($T=2\pi$).
5. Графік функції перетинає вісь Oy у точці $(0;1)$, вісь Ox — у точках $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;0\right)$, $k\in\boldsymbol{Z}$ (рисунок).
6. $y>0$, якщо $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in\boldsymbol{Z}$; $y<0$, якщо $x\in\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in\boldsymbol{Z}$.
7. Функція зростає на проміжках $[-\pi+2\pi k;2\pi k]$, $k\in\boldsymbol{Z}$, і спадає на проміжках $[2\pi k;\pi+2\pi k]$, $k\in\boldsymbol{Z}$.
8. $y_{\max}=1$ у точках $x_{\max}=2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; $y_{\min}=-1$ у точках $x_{\min}=\pi+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$

Функція $y=\operatorname{tg}x$

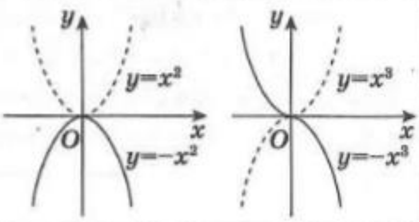


1. Область визначення — $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.
2. Область значень — $\boldsymbol{R}$.
3. Функція непарна.
4. Функція періодична, найменший додатний період $T=\pi$.
5. Графік функції перетинає вісь Oy у точці $(0;0)$, вісь Ox — у точках $(\pi k;0)$, $k\in\boldsymbol{Z}$ (рисунок).
6. $y>0$, якщо $x\in\left(\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in\boldsymbol{Z}$; $y<0$, якщо $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\pi k\right)$, $k\in\boldsymbol{Z}$.
7. Функція зростає на проміжках $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in\boldsymbol{Z}$.
8. Найменших і найбільших значень функція не має

Перетворення графіків функцій

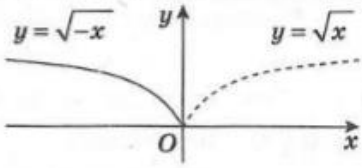
Перетворення графіка функції $y=f(x)$ у графік функції $y=-f(x)$

Графік функції $y=-f(x)$ одержують із графіка функції $y=f(x)$ за допомогою симетрії відносно осі Ox. Приклад перетворення наведено на рисунку



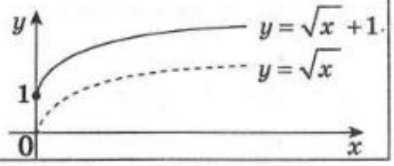
Перетворення графіка функції $y=f(x)$ у графік функції $y=f(-x)$

Графік функції $y=f(-x)$ одержують із графіка функції $y=f(x)$ за допомогою симетрії відносно осі Oy. Приклад перетворення наведено на рисунку



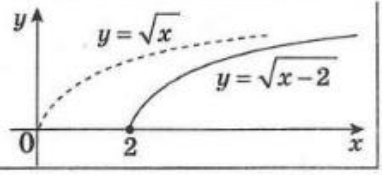
Перетворення графіка функції $y=f(x)$ у графік функції $y=f(x)+b$

Графік функції $y=f(x)+b$ одержують із графіка функції $y=f(x)$ за допомогою паралельного перенесення вздовж осі Oy на b одиниць. Приклад перетворення наведено на рисунку



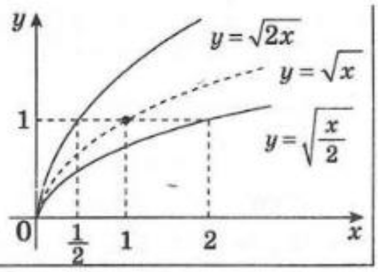
Перетворення графіка функції $y=f(x)$ у графік функції $y=f(x-a)$

Графік функції $y=f(x-a)$ одержують із графіка функції $y=f(x)$ за допомогою паралельного перенесення вздовж осі Ox на a одиниць. Приклад перетворення наведено на рисунку



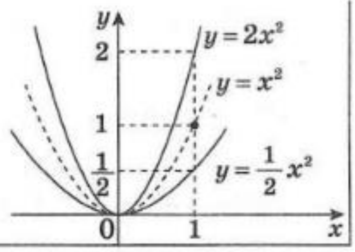
Перетворення графіка функції $y=f(x)$ у графік функції $y=f(kx)$

Графік функції $y=f(kx)$, де $k>0$, одержують із графіка функції $y=f(x)$: стисканням його вздовж осі Ox у k разів, якщо $k>1$; розтягненням його вздовж осі Ox у $\frac{1}{k}$ разів, якщо $0<k<1$. Приклад перетворення наведено на рисунку



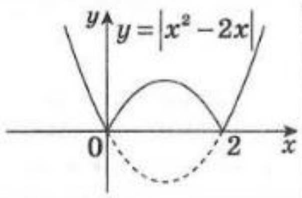
Перетворення графіка функції $y=f(x)$ у графік функції $y=kf(x)$

Графік функції $y=kf(x)$, де $k>0$, одержують із графіка функції $y=f(x)$: розтягненням його вздовж осі Oy у k разів, якщо $k>1$; стисканням уздовж осі Oy у $\frac{1}{k}$ разів, якщо $0<k<1$. Приклад перетворення наведено на рисунку



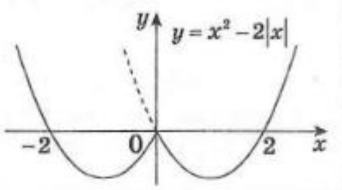
Перетворення графіка функції $y=f(x)$ у графік функції $y=|f(x)|$

Графік функції $y=|f(x)|$ одержують із графіка функції $y=f(x)$ так: вище від осі Ox (і на самій осі) залишають його без змін; нижче від осі Ox симетрично відображають його відносно осі Ox. Приклад перетворення наведено на рисунку



Перетворення графіка функції $y=f(x)$ у графік функції $y=f(|x|)$

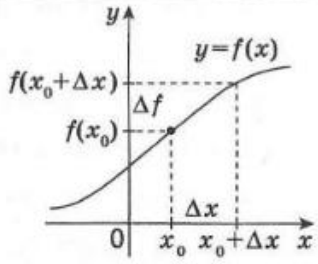
Графік функції $y=f(|x|)$ одержують із графіка функції $y=f(x)$ так: праворуч від осі Oy (і на самій осі) залишають без змін і симетрично відображають цю частину відносно осі Oy. Приклад перетворення наведено на рисунку



Похідна

Приріст аргумента й приріст функції

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в точках x_0 і $x_1=x_0+\Delta x$. Різниця $x_1-x_0=\Delta x$ називається ***приростом аргумента***, а різниця $f(x_1)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ називається ***приростом функції*** при переході від значення аргумента x_0 до значення аргумента $x_1=x_0+\Delta x$ (рисунок). Приріст функції позначається Δf або Δy, тобто $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$



Означення похідної

Похідною функції $f(x)$ у точці x_0 (позначають $f'(x_0)$) називається границя відношення приросту функції до приросту аргумента за умови, що приріст аргумента прямує до нуля, тобто

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

де $\Delta x=x_1-x_0$ — приріст аргумента; x_1 і x_0 — два значення незалежної змінної з області визначення функції $f(x)$; $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta f$ — приріст функції в точці x_0.

Функція, що має похідну в точці x_0, називається ***диференційовною в цій точці***.

Для знаходження похідної функції $f'(x)$ користуються правилами та формулами диференціювання

Основні правила диференціювання

1. $(u+v)'=u'+v'$.
2. $(uv)'=u'v+uv'$.
3. $(Cu)'=Cu'$.
4. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ за умови, що $v\neq 0$.
5. $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$; тобто якщо $y=f(u)$, де $u=\varphi(x)$, то $y'_x=f'_u(u)\cdot\varphi'_x(x)$ або $y'_x=y'_u\cdot u'_x$

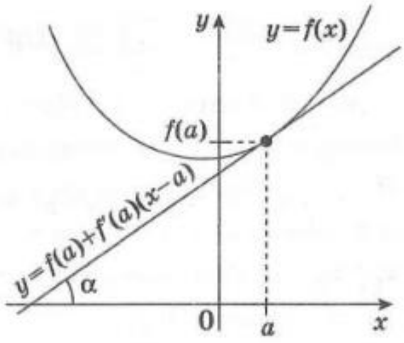
Таблиця похідних

Похідні елементарних функцій

$C'=0$, $x'=1$;	$(e^x)'=e^x$;	$(\lg x)'=\frac{1}{x}\lg e$;	$(\cos x)'=-\sin x$;
$(kx+b)'=k$;	$(a^x)'=a^x\ln a$;	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$;	$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
$(x^n)'=nx^{n-1}$;	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$;	$(\sin x)'=\cos x$;	

Геометричний зміст похідної

Нехай задано функцію $y=f(x)$, що має похідну в точці $x=a$. Проведемо дотичну до графіка функції $y=f(x)$ через точку $(a; f(a))$, тоді кутовий коефіцієнт, або тангенс кута між дотичною і додатним напрямком осі Ox, дорівнюватиме похідній функції $y=f(x)$ у точці $x=a$, тобто $k=\operatorname{tg}\alpha=f'(a)$.



Геометричний зміст похідної: похідна функції $y=f(x)$ у точці $x=a$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y=f(x)$ у цій точці: $f'(a)=k=\operatorname{tg}\alpha$ (рисунок).

Рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ у точці $x=a$: $y=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$.

Наприклад, рівняння дотичної до графіка функції $y=x^2-4x$ у точці $x=1$ має вигляд: $y=-3-2(x-1)$ або $y=-1-2x$, оскільки $f(a)=1^2-4\cdot1=-3$; $f'(x)=2x-4$; $f'(a)=f'(1)=2\cdot1-4=-2$

Механічний зміст похідної

Якщо точка рухається вздовж осі Ox і її координата змінюється за законом $x=x(t)$, то миттєва швидкість точки $v(t)=\lim\limits_{\Delta t\to0}\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=x'(t)$, а прискорення $a(t)=\lim\limits_{\Delta t\to0}\dfrac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=v'(t)$.

Наприклад, якщо тіло рухається за законом $x(t)=\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{12}t^2+7t+12$, то його швидкість змінюється за законом $v(t)=(x(t))'=\left(\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{12}t^2+7t+12\right)'=t^3-t^2+\frac{1}{6}t+7$, а прискорення змінюється за законом $a(t)=v'(t)=\left(t^3-t^2+\frac{1}{6}t+7\right)'=3t^2-2t+\frac{1}{6}$

Застосування похідної в дослідженні функцій і побудові графіків

Достатня умова зростання (спадання) функції

Достатня умова зростання функції. Якщо в кожній точці інтервалу $(a; b)$ $f'(x)>0$, то функція $y=f(x)$ зростає на цьому інтервалі (рис. 1).

Достатня умова спадання функції. Якщо в кожній точці інтервалу $(a; b)$ $f'(x)<0$, то функція $y=f(x)$ спадає на цьому інтервалі (рис. 2).

Необхідна й достатня умова сталості функції. Функція $f(x)$ є сталою на інтервалі $(a; b)$ тоді й тільки тоді, коли $f'(x)=0$ у кожній точці цього інтервалу (рис. 3).

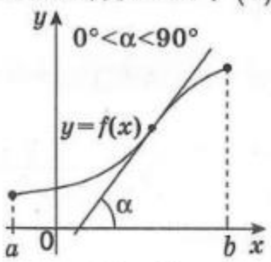


Рис. 1

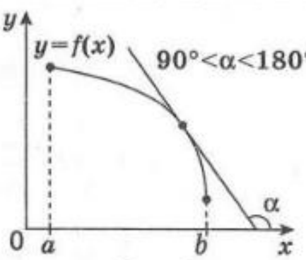


Рис. 2

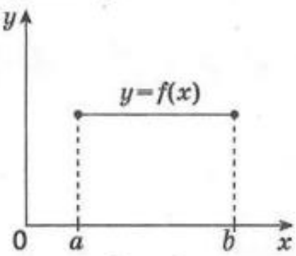


Рис. 3

Екстремуми (максимуми й мінімуми) функції

Точка максимуму

Точка x_0 називається ***точкою максимуму (локального максимуму)*** функції $y=f(x)$, якщо знайдеться такий окіл точки x_0, що для всіх x із цього околу виконується умова $f(x_0)\geqslant f(x)$ (рис. 1).

x_0 — точка максимуму функції $f(x)$; $f(x_0)$ — максимум функції $f(x)$.

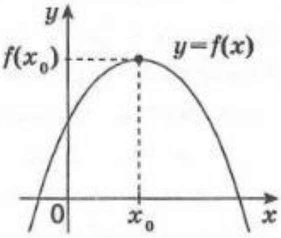


Рис. 1

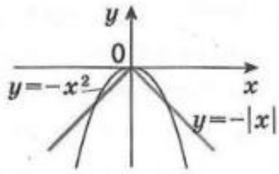


Рис. 2

Наприклад, $x=0$ є точкою максимуму для функцій $y=-x^2$ і $y=-|x|$ (рис. 2)

Точка мінімуму

Точка x_0 називається ***точкою мінімуму (локального мінімуму)*** функції $y=f(x)$, якщо знайдеться такий окіл точки x_0, що для всіх x із цього околу виконується умова $f(x_0)\leqslant f(x)$ (рис. 1).

x_0 — точка мінімуму функції $f(x)$; $f(x_0)$ — мінімум функції $f(x)$.

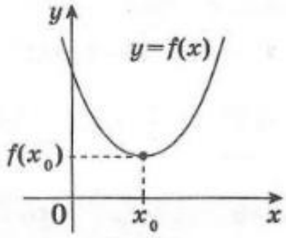


Рис. 1

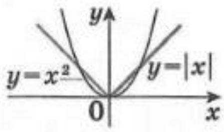


Рис. 2

Наприклад, $x=0$ є точкою мінімуму для функцій $y=x^2$ і $y=|x|$ (рис. 2)

Точки екстремуму

Точки максимуму й точки мінімуму називаються ***точками екстремуму***; позначаються так: $x_{\max}$, $x_{\min}$.

Значення функції в точках мінімуму й максимуму називаються ***екстремумами функції***, позначаються так: $y_{\min}$, $y_{\max}$ або $f_{\min}$, $f_{\max}$

Необхідна умова екстремуму (теорема Ферма)

Якщо x_0 — точка екстремуму функції $y=f(x)$, то в цій точці похідна дорівнює нулю або не існує ***(теорема Ферма)***.

Внутрішні точки області визначення функції, у яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються ***критичними***.

1. $f'(0)=0$, $x=0$ — точка екстремуму (рис. 1).
2. $f'(0)$ — не існує, $x=0$ — точка екстремуму (рис. 2).
3. $f'(0)=0$, але $x=0$ не є точкою екстремуму (рис. 3).

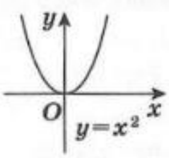


Рис. 1

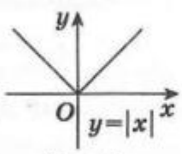


Рис. 2

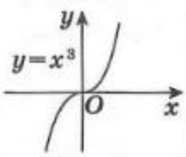


Рис. 3

Достатні умови екстремуму

Якщо функція $y=f(x)$ неперервна в точці x_0 і похідна $f'(x)$ змінює знак у цій точці, то x_0 — точка екстремуму функції $y=f(x)$.

Якщо в точці x_0 знак $f'(x)$ змінюється з «+» на «−», то x_0 — точка максимуму.

Якщо в точці x_0 знак $f'(x)$ змінюється з «−» на «+», то x_0 — точка мінімуму

Схема знаходження найбільшого (найменшого) значення функції на проміжку

Для неперервної на відрізку $[a; b]$ функції $y=f(x)$ її найбільше (або найменше) значення досягається або в критичних точках, або на кінцях проміжку. Тому, щоб знайти найбільше або найменше значення неперервної функції на проміжку $[a; b]$, необхідно обчислити значення функції в усіх критичних точках, що належать проміжку $(a; b)$, і на кінцях проміжку для $x=a$, $x=b$, а потім серед одержаних чисел вибрати найбільше й найменше.

Приклад. Знайдіть найбільше й найменше значення функції $f(x)=x+e^{-x}$ на відрізку $[-1; 2]$.

Розв'язання. Знаходимо $f'(x)$: $f'(x)=(x+e^{-x})'=1-e^{-x}$.

Знаходимо критичні точки: $f'(x)=0$; $1-e^{-x}=0$; $e^{-x}=1$; $x=0$.

Знаходимо значення функції в критичній точці й на кінцях відрізка:

$f(0)=0+e^{0}=1$; $f(-1)=-1+e^{1}=e-1$; $f(2)=2+e^{-2}=2+\frac{1}{e^2}$. $f_{\text{найб}}=f(2)=2+\frac{1}{e^2}$; $f_{\text{найм}}=f(0)=1$.

Відповідь: $f_{\text{найб}}=f(2)=2+\frac{1}{e^2}$; $f_{\text{найм}}=f(0)=1$

Схема дослідження функції на монотонність і екстремуми

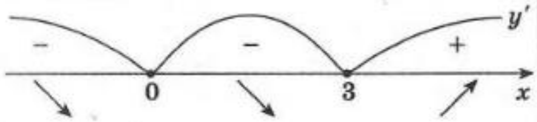
1. Знайти область визначення й інтервали, на яких функція неперервна.
2. Знайти похідну.
3. Знайти критичні точки.
4. Позначити критичні точки на області визначення, знайти знак похідної та характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які критичні точки розбивають область визначення.
5. Визначити для кожної критичної точки, чи є вона точкою максимуму, мінімуму, чи не є точкою екстремуму.
6. Записати результат дослідження функції: проміжки монотонності й екстремуми.

Приклад. Дослідити функцію $y=x^4-4x^3$ на монотонність і екстремуми.

Розв'язання. $D(y)=R$. Функція неперервна на R. $y'=(x^4-4x^3)'=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$.

Знаходимо критичні точки: $D(y')=R$; $y'=0$, $4x^2(x-3)=0$, $x=0$ або $x=3$.

Наносимо критичні точки на координатну пряму (рисунок) і визначаємо знак похідної та характер поведінки функції. (Знаками ↘ і ↗ позначають спадання і зростання функції відповідно.)



Отже, функція спадає на проміжку $(-\infty; 3)$, зростає на проміжку $(3; +\infty)$.

$x=3$ — точка мінімуму $y_{\min}=3^4-4\cdot3^3=-27$.

Відповідь. Функція спадає на проміжку $(-\infty; 3)$, зростає на проміжку $(3; +\infty)$; $x_{\min}=3$, $y_{\min}=-27$

Схема дослідження функції. Побудова графіка функції

1. Знайти область визначення функції.
2. З'ясувати специфічні ознаки: чи є функція парною або непарною, чи вона періодична.
3. Знайти точки перетину графіка з осями координат.
4. Визначити проміжки знакосталості.
5. З'ясувати проміжки монотонності функції.
6. Знайти точки екстремуму та значення функції в цих точках.
7. Дослідити поведінку функції в околі «особливих» точок і при великих за модулем x.
8. Побудувати схематичний графік функції.

Приклад. Дослідити функцію $f(x)=x^3-3x^2$ та побудувати її графік.

Розв'язання. $D(f)=R$. Функція не є ні парною, ні непарною.

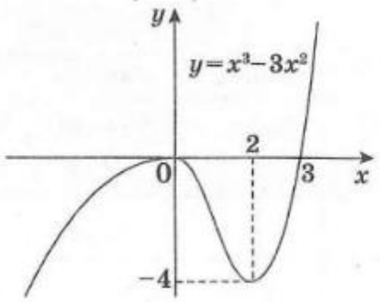
Знаходимо абсциси точок перетину графіка з віссю Ox: $x^3-3x^2=0$; $x^2(x-3)=0$; $x=0$ або $x=3$.
Знаходимо ординату точки перетину графіка з віссю Oy: $y=f(0)=0^3-3\cdot0^2=0$.

Знаходимо похідну: $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$. $D(f')=R$. Знаходимо критичні точки: $3x(x-2)=0$; $x=0$ або $x=2$. Складаємо таблицю.

x	$(-\infty;\ 0)$	0	$(0;\ 2)$	2	$(2;\ +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	−4	↗
		max		min	

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-2x^2)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-2x^2)=-\infty$.

Використовуючи результати дослідження, будуємо графік функції $y=x^3-3x^2$ (рисунок)



Первісна, невизначений інтеграл

Первісна

Функція $F(x)$ називається ***первісною*** для функції $f(x)$ на заданому проміжку, якщо для всіх x із цього проміжку $F'(x)=f(x)$.

Наприклад, функція $F(x)=x^2$ — первісна для функції $f(x)=2x$, оскільки $F'(x)=(x^2)'=2x=f(x)$

Основна властивість первісної

Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на заданому проміжку, то функція $f(x)$ має безліч первісних і всі ці первісні можна записати у вигляді $F(x)+C$, де C — довільна стала.

Наприклад, функції $F(x)=x^2+C$ є первісними для функції $f(x)=2x$, оскільки $F'(x)=(x^2+C)'=2x=f(x)$

Правила обчислення первісних

1. Первісна суми функцій дорівнює сумі первісних функцій: тобто якщо $F(x)$ — первісна для $f(x)$, а $G(x)$ — первісна для $g(x)$, то $F(x)+G(x)$ — первісна для функції $f(x)+g(x)$.
2. Сталий множник можна виносити за знак первісної, тобто якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ і C — стала, то $CF(x)$ — первісна для $Cf(x)$.
3. Якщо $F(x)$ — первісна для $f(x)$ і $k\neq0$, b — сталі, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первісна для функції $f(kx+b)$

Невизначений інтеграл

Невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ називається вираз $F(x)+C$, тобто сукупність усіх первісних даної функції $f(x)$.

Позначається так: $\int f(x)dx=F(x)+C$, де функція $f(x)$ називається ***підінтегральною функцією***; вираз $f(x)dx$ — ***підінтегральним виразом***; $F(x)$ — одна з первісних функції $f(x)$; C — довільна стала

Основні правила інтегрування

1. $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
2. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$.
3. Якщо $k \neq 0$ і k, b — сталі, то $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$

Таблиця первісних і таблиця невизначених інтегралів

Таблиця первісних

Функція $f(x)$	Первісні $F(x)+C$	Функція $f(x)$	Первісні $F(x)+C$
0	C	$\sin x$	$-\cos x + C$
1	$x+C$	$\cos x$	$\sin x + C$
$x^n (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	e^x	$e^x + C$
		a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$

Таблиця невизначених інтегралів

$\int 0dx = C$; $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

$\int dx = x + C$; $\int \cos x dx = \sin x + C$;

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, $n \neq -1$; $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$;

$\int e^x dx = e^x + C$;

$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$; $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;

Визначений інтеграл і його застосування

Визначений інтеграл

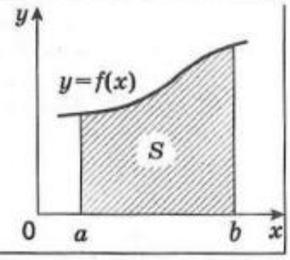
Нехай задано неперервну функцію $y=f(x)$, визначену на проміжку $[a; b]$, тоді ***визначеним інтегралом*** від a до b функції $f(x)$ називається приріст первісної $F(x)$ цієї функції, тобто $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$. Числа a і b називаються відповідно ***нижньою і верхньою межами інтегрування***

Основні правила обчислення визначеного інтеграла

1. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, де c — стала.
2. $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
4. $\int_a^b f(kx+l)dx = \frac{1}{k}\int_{ka+l}^{kb+l} f(t)dt$.
5. $\int_a^a f(x)dx = 0$.
6. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, де $a < c < b$

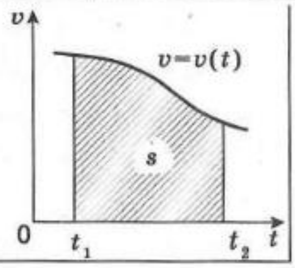
Геометричний зміст визначеного інтеграла

Площа S криволінійної трапеції (фігура, обмежена графіком неперервної додатної на проміжку $[a;\, b]$ функції $f(x)$, віссю Ox та прямими $x = a$, $x = b$) обчислюється за формулою $S = \int_a^b f(x)dx$ (рисунок)



Фізичний зміст визначеного інтеграла

Під час прямолінійного руху переміщення s чисельно дорівнює $\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$, де $v(t)$ — швидкість руху (рисунок)



Площа фігури

Якщо на заданому проміжку $[a;\, b]$ неперервні функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ мають властивість $f(x) \geqslant g(x)$ для всіх $x \in [a;\, b]$, то $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$ (рис. 1).

Приклад. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$ і $y = -x + 2$.

Розв'язання. Зобразимо схематично графіки даних функцій (рис. 2). Знаходимо межі інтегрування: $x^2 = -x + 2$; $x^2 + x - 2 = 0$; $x = -2$ або $x = 1$.

Тоді $S = \int_{-2}^{1} ((-x + 2) - x^2)dx = 4{,}5$. *Відповідь.* 4,5

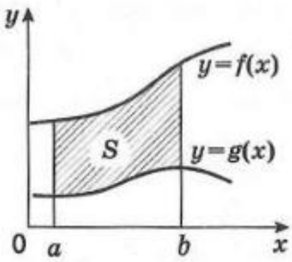


Рис. 1

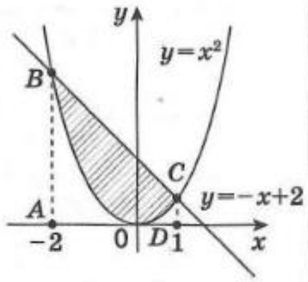


Рис. 2

Розділ IV. Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи математичної статистики

Елементи комбінаторики

Перестановки

Будь-яка впорядкована множина, що складається з n елементів, називається ***перестановкою з n елементів***.

Число перестановок із n елементів (позначається P_n) дорівнює добутку всіх натуральних чисел від 1 до n, тобто $n!$ (читається «ен факторіал») $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$

За означенням $0! = 1$

Розміщення

Будь-яка впорядкована підмножина з m елементів даної множини, що містить n елементів, де $m \leqslant n$, називається ***розміщенням з n елементів по m елементів***.

Число розміщень із n елементів по m позначається A_n^m.

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot \ldots \cdot (n-m+1), \text{ або } A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Якщо $n = m$, то $A_n^m = P_n$

Комбінації

Будь-яка підмножина з m елементів даної множини, що містить n елементів, називається ***комбінацією з n елементів по m елементів***.

Число комбінацій з n елементів по m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ позначається C_n^m.

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot m}, \text{ або } C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$C_n^0 = 1$; $C_n^1 = n$; $C_n^n = 1$.

Властивості числа комбінацій

$C_n^m = C_n^{n-m}$; $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$; $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$

Правила суми й добутку

Правило суми. Якщо елемент A можна вибрати m способами, а елемент B — n способами, то A або B можна вибрати $m + n$ способами.

Правило добутку. Якщо елемент A можна вибрати m способами, а після цього елемент B — n способами, то пару A і B можна вибрати mn способами.

Початки теорії ймовірностей

Основні поняття

Подія — це явище, про яке можна сказати, що воно відбувається або не відбувається за певних умов. Події поділяють на ***випадкові***, ***вірогідні*** й ***неможливі***.

Випадковою називається подія, що може відбутись або не відбутись у результаті певного випробування.

Вірогідною називається подія, яка внаслідок даного випробування обов'язково відбудеться.

Неможливою називається подія, що внаслідок даного випробування не може відбутися. Неможлива подія позначається символом $\varnothing$.

Попарно несумісні події — це події, кожні дві з яких не можуть відбутись одночасно.

Класичне означення ймовірності

Відношення числа m елементарних подій, що сприяють події A, до загальної кількості n подій простору елементарних подій називається ***ймовірністю випадкової події A*** й позначається $P(A)$, тобто $P(A)=\frac{m}{n}$, де m — число подій, що сприяють події A; n — число подій простору елементарних подій $(0\leqslant m\leqslant n)$.

Імовірність вірогідної події дорівнює 1, імовірність неможливої події дорівнює 0, а імовірність $P(A)$ випадкової події A задовольняє умову $0<P(A)<1$

Теорема про ймовірність суми подій

Імовірність суми двох несумісних подій A і B дорівнює сумі імовірностей цих подій. Якщо $A\cdot B=\varnothing$, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Наприклад, якщо мисливець стріляє в мішень, поділену на дві частини, й імовірність влучення в першу частину дорівнює 0,45, а в другу — 0,35, то імовірність влучення в мішень становить $0{,}45+0{,}35=0{,}8$.

Елементи статистики

Вибіркові характеристики

У процесі вибіркового спостереження вивчається лише частина сукупності, що називається ***вибіркою***.

Вибірка характеризується ***середнім значенням***, ***розмахом***, ***модою*** й ***медіаною***.

Середнім значенням вибірки називається середнє арифметичне всіх її значень:

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Розмах вибірки — це різниця між найбільшим і найменшим значеннями величини у вибірці.

Мода вибірки — це її значення, що зустрічається найчастіше (позначається Mo).

Медіана вибірки — це число, що ділить навпіл упорядковану сукупність усіх значень вибірки, тобто середня величина змінюваної ознаки, що міститься в середині ряду, побудованого в порядку зростання або спадання ознаки (позначається Me)

Розділ V. Планіметрія

Кути

Два кути називаються ***рівними***, якщо вони можуть бути суміщені так, що збігатимуться їх відповідні сторони і вершини (рис. 1).

Два кути називаються ***суміжними***, якщо в них спільні вершина й одна сторона, а дві інші утворюють пряму. Сума суміжних кутів дорівнює 180° (рис. 2).

Кути називаються ***вертикальними***, якщо сторони одного є продовженнями за вершину сторін другого. Вертикальні кути рівні між собою (рис. 3).

Бісектриса кута — промінь, що виходить з вершини кута, проходить між його сторонами й ділить кут навпіл (рис. 4).

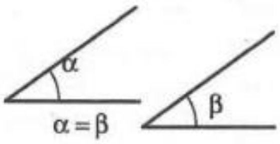


Рис. 1

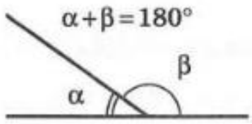
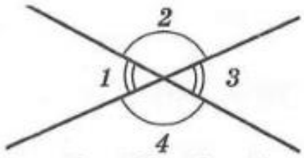


Рис. 2



$\angle 1=\angle 3;\ \angle 2=\angle 4$

Рис. 3

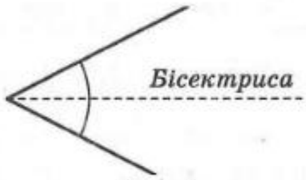
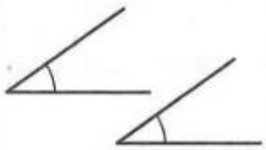
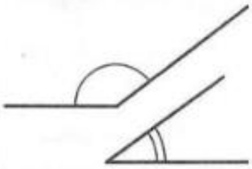
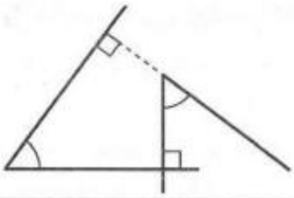
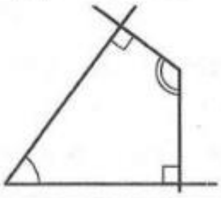


Рис. 4

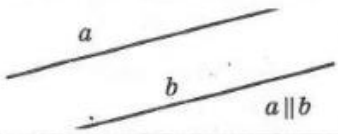
Властивості кутів

Кути з відповідно паралельними сторонами		Кути з відповідно перпендикулярними сторонами	
Або рівні	або їх сума дорівнює 180°	Або рівні	або їх сума дорівнює 180°
			

Паралельні та перпендикулярні прямі

Паралельні прямі

Прямі, що лежать в одній площині і не перетинаються, називаються ***паралельними***



Ознаки паралельності прямих

Внутрішні (зовнішні) різносторонні кути рівні (рис. 1) — $\angle 1=\angle 4$; $\angle 2=\angle 3$.
Відповідні кути рівні (рис. 2).
Сума внутрішніх (зовнішніх) односторонніх кутів дорівнює 180° (рис. 3).

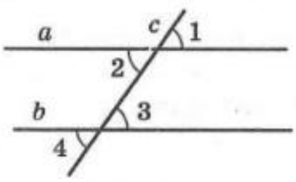


Рис. 1

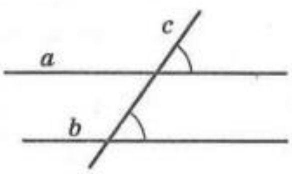


Рис. 2

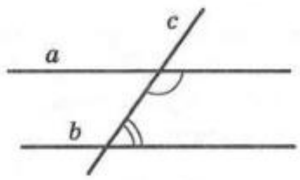


Рис. 3

Властивості паралельних прямих

Дві прямі, що паралельні третій, паралельні: $a \parallel b$, $a \parallel c \Rightarrow b \parallel c$ (рис. 1).

Теорема Фалеса

Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відсікають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відсікають рівні відрізки і на другій його стороні (рис. 2).

Узагальнена теорема Фалеса

Паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відсікають від сторін кута пропорційні відрізки. $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (рис. 3).

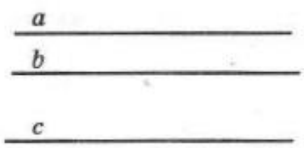


Рис. 1

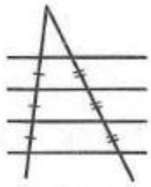


Рис. 2

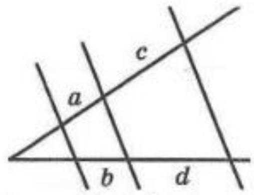
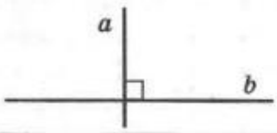


Рис. 3

Перпендикулярні прямі

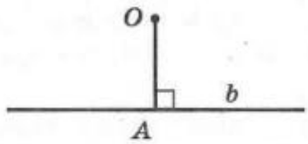
Дві прямі називаються ***перпендикулярними***, якщо вони перетинаються під прямим кутом

$a \perp b$



Перпендикуляр і похила

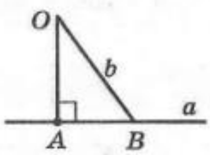
Перпендикуляром до даної прямої називається відрізок прямої, перпендикулярної до даної, від заданої точки до точки перетину цих прямих



OA — перпендикуляр до b,
A — основа перпендикуляра

Похилою до даної прямої a називається відрізок прямої, що перетинає дану під кутом, відмінним від прямого, від заданої точки до точки перетину цих прямих.

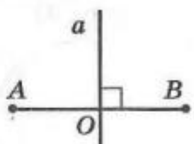
Перпендикуляр коротший від похилої, яка проведена з тієї самої точки



OB — похила

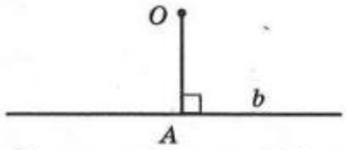
Серединний перпендикуляр, відстані від точки до прямої, між паралельними прямими

Серединним перпендикуляром до відрізка називається пряма, яка перпендикулярна до відрізка і проходить через його середину.



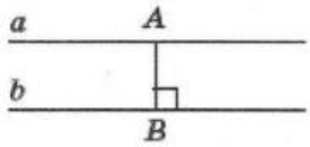
$AO = OB$, $a \perp AB$,
пряма a — серединний перпендикуляр до відрізка AB

Відстанню від точки до прямої, яка не проходить через дану точку, називається довжина перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної прямої.



OA — відстань від точки O до прямої b

Відстанню між паралельними прямими називається відстань від будь-якої точки однієї із цих прямих до другої прямої.



$a \parallel b$, AB — відстань між прямими a і b

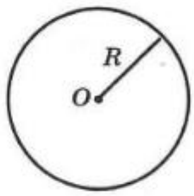
Коло і круг

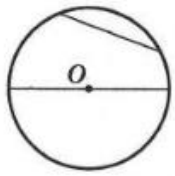
Основні означення

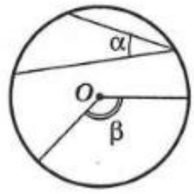
Колом називається замкнена плоска крива, всі точки якої однаково віддалені від даної точки (***центра кола***), що лежить у тій самій площині, що й крива.

Відрізок R, що з'єднує центр кола з будь-якою його точкою (а також довжина цього відрізка), називається ***радіусом*** (рис. 1).

Відрізок, що з'єднує дві точки кола, називається ***хордою***. Хорда, що проходить через центр кола, називається ***діаметром*** (рис. 2).







α — вписаний кут;
β — центральний кут

Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

Діаметр — найбільша з хорд.

Дуга — частина кола, розміщена між двома його точками.

Вписаним кутом називається кут, утворений двома хордами, що мають спільний кінець.

Центральним кутом називається кут, утворений двома радіусами (рис. 3).

Властивості хорд

Рівні хорди стягують рівні дуги: $AB = CD \Rightarrow \cup AB = \cup CD$ (рис. 1).

Діаметр, що проходить через середину хорди, перпендикулярний до неї (рис. 2).

Паралельні хорди відтинають на колі рівні дуги: $AB \parallel CD \Rightarrow \cup AC = \cup BD$ (рис. 3).

Хорди, рівновіддалені від центра кола, рівні. Більша з двох хорд міститься ближче до центра кола (рис. 4).

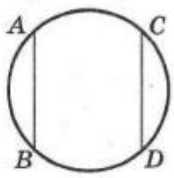


Рис. 1

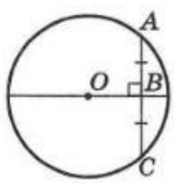


Рис. 2

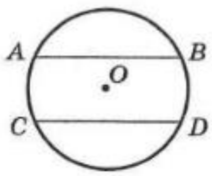


Рис. 3

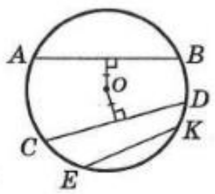
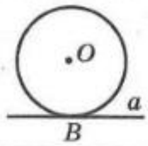


Рис. 4

Дотична до кола

Пряма, що лежить в одній площині з колом і має з ним тільки одну спільну точку, називається ***дотичною*** до цього кола



Властивості дотичної до кола

Пряма, що перпендикулярна до діаметра кола й проходить через його кінець, є дотичною до цього кола (рис. 1).

Дотична до кола перпендикулярна до діаметра, що проходить через точку дотику (рис. 2).

Дотичні, проведені з однієї точки, утворюють рівні кути з прямою, що проходить через цю точку і центр кола: $\angle BAO = \angle OAC$ (рис. 3).

Відрізки дотичних, проведених з однієї точки, рівні: $AB = AC$ (рис. 4).

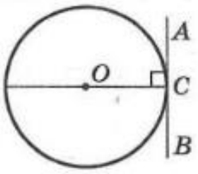


Рис. 1

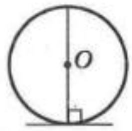


Рис. 2

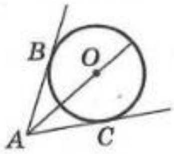


Рис. 3

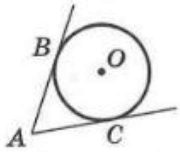
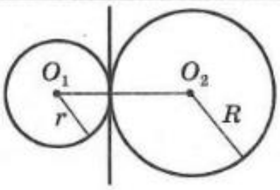
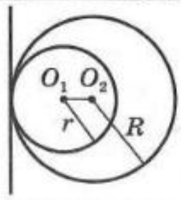


Рис. 4

Дотик двох кіл

Зовнішній	Внутрішній
 $O_1O_2 = r + R$	 $O_1O_2 = R - r$

Градусна міра дуги

Градусною мірою дуги називається градусна міра відповідного їй центрального кута

Вписані кути

Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається, і дорівнює половині центрального кута, що спирається на ту саму дугу: $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$ (рис. 1).

Вписані кути, що спираються на одну дугу, рівні: $\angle\alpha = \angle\beta$ (рис. 2).

Вписаний кут, що спирається на діаметр (півколо),— прямий $\angle ABC = 90^\circ$ (рис. 3).

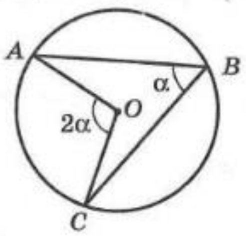


Рис. 1

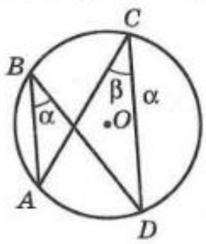


Рис. 2

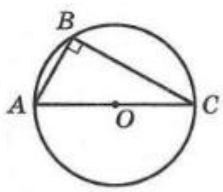
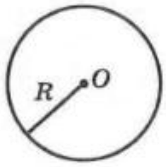


Рис. 3

Довжина кола і дуги

Довжина кола радіуса R дорівнює $2\pi R$ (рис. 1).

Довжина дуги кола дорівнює добутку радіуса кола на радіанну міру дуги $l=\alpha\cdot R$ (рис. 2)



$C=2\pi R$

Рис. 1

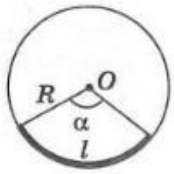


Рис. 2

Площа круга і його частин

Площа круга $S=\pi R^2$ (рис. 1).

Площа сектора $S=\frac{1}{2}\alpha R^2$, де α — кут у радіанах (рис. 2)

Площа сегмента $S=\frac{1}{2}(\alpha-\sin\alpha)R^2$ (рис. 3)

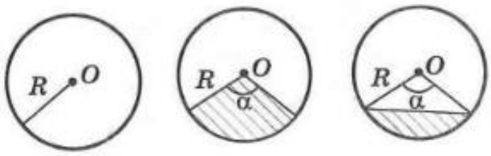


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

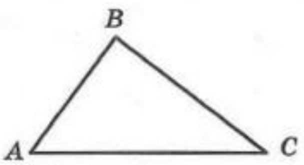
Трикутники

Основні означення

Трикутник — це фігура, що складається з трьох точок, які не лежать на одній прямій (***вершин трикутника***), і трьох відрізків з кінцями у цих точках (***сторін трикутника***) (рис. 1).

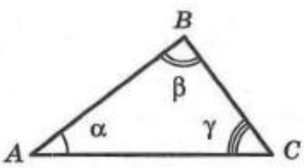
Кутами (внутрішніми кутами) трикутника називаються три кути, кожний з яких утворений двома променями, що виходять з вершини трикутника і проходять через дві інші вершини (рис. 2).

Зовнішнім кутом трикутника називається кут, суміжний із внутрішнім кутом трикутника (рис. 3).



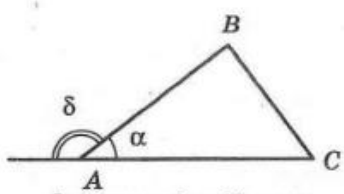
A, B, C — вершини,
AB, BC, AC — сторони

Рис. 1



α, β, γ — кути трикутника

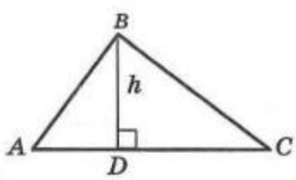
Рис. 2



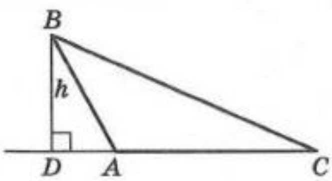
δ — зовнішній кут

Рис. 3

Висотою трикутника називається перпендикуляр, опущений з будь-якої вершини трикутника на протилежну сторону або на продовження сторони



$BD=h$ — висота, проведена до сторони AC

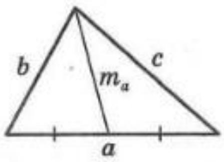


$BD=h$ — висота, проведена до продовження сторони AC

Медіаною **трикутника називається відрізок прямої, що з'єднує вершину трикутника із серединою протилежної сторони (рис. 1).**

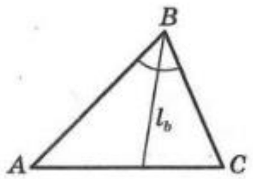
Бісектрисою **трикутника називається відрізок бісектриси внутрішнього кута трикутника, що з'єднує дану вершину з точкою на протилежній стороні (рис. 2).**

Середньою лінією трикутника **називається відрізок, що з'єднує середини двох сторін трикутника (рис. 3).**



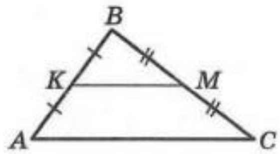
m_a — *медіана, проведена до сторони a*

Рис. 1



l_b — *бісектриса кута B трикутника*

Рис. 2



KM — середня лінія

Рис. 3

Коло **називається** ***вписаним*** **у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін (рис. 1).**

Коло **називається** ***описаним*** **навколо трикутника, якщо воно проходить через усі вершини трикутника (рис. 2).**

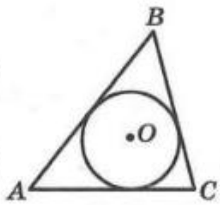


Рис. 1

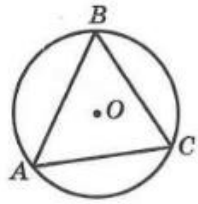


Рис. 2

Властивості кутів і сторін трикутника

Сума кутів трикутника дорівнює 180°. $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ (рис. 1).

Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним, і більший, ніж будь-який внутрішній кут, не суміжний з ним: $\delta=\beta+\gamma$; $\delta>\beta$; $\delta>\gamma$ (рис. 2).

Нерівність трикутника

Довжина кожної сторони трикутника менша, ніж сума, і більша, ніж різниця довжин двох інших сторін: $|a-b|<c<a+b$ (рис. 3).

У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут (і навпаки): $\angle B>\angle C \Rightarrow b>c$ (рис. 4).

Середня лінія трикутника паралельна одній з його сторін і дорівнює її половині: $KM \parallel AC$; $KM=\dfrac{AC}{2}$ (рис. 5).

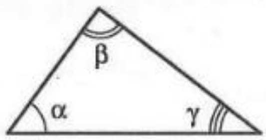


Рис. 1

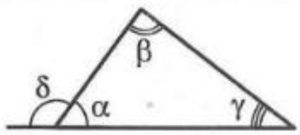


Рис. 2

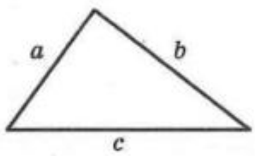


Рис. 3

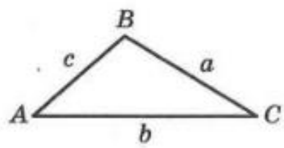


Рис. 4

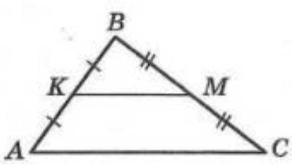
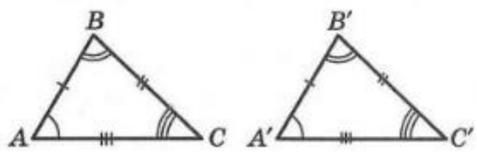


Рис. 5

Рівність трикутників

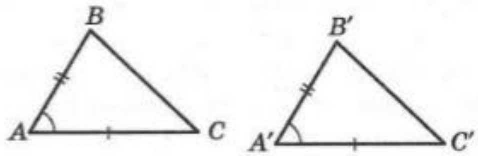
Трикутники називаються рівними, якщо в них відповідні сторони й кути рівні.

$\triangle ABC=\triangle A'B'C'$

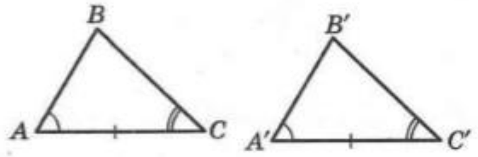


Ознаки рівності трикутників

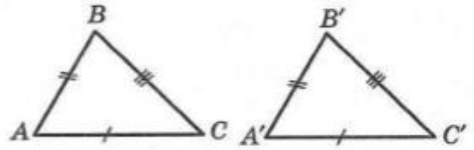
1. Якщо дві сторони й кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні



2. Якщо сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні



3. Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні



Властивості рівних трикутників

У рівних трикутниках усі відповідні елементи рівні (сторони, кути, висоти, медіани, бісектриси).

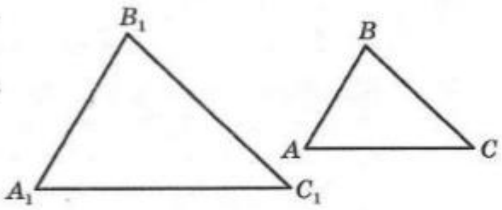
У рівних трикутниках проти рівних сторін лежать рівні кути, а проти рівних кутів лежать рівні сторони

Подібність трикутників

Подібними називаються ***трикутники***, у яких відповідні сторони пропорційні.

Коефіцієнт пропорційності називається ***коефіцієнтом подібності***

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=k$$



$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$

Ознаки подібності трикутників

Два трикутники подібні, якщо

1. Два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам іншого трикутника.
2. Дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам іншого трикутника, і кути, утворені цими сторонами, рівні.
3. Сторони одного трикутника пропорційні сторонам іншого трикутника

Властивості подібних трикутників

У подібних трикутниках відповідні кути рівні, а відповідні відрізки пропорційні

$$\angle A=\angle A_1;\ \angle B=\angle B_1;\ \angle C=\angle C_1;\ \frac{h_a}{h_{a_1}}=\frac{h_b}{h_{b_1}}=\frac{h_c}{h_{c_1}}=\frac{m_a}{m_{a_1}}=\ldots=\frac{l_c}{l_{c_1}}=k.$$

Відношення периметрів подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності.

Відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

Пряма, паралельна одній із сторін трикутника, відсікає трикутник, подібний до даного: $KL \parallel AC$; $\triangle ABC \sim \triangle KBL$ (рис. 1).

Три середні лінії трикутника ділять його на чотири рівні трикутники, подібні до даного з коефіцієнтом подібності $\frac{1}{2}$ (рис. 2).

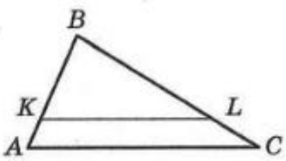


Рис. 1

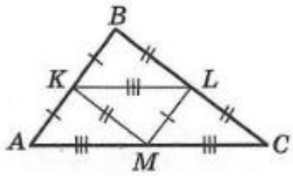


Рис. 2

Медіани, бісектриси, висоти і середні лінії трикутника

Властивості медіан трикутника

Три медіани трикутника перетинаються в одній точці, що ділить медіани у відношенні $2:1$, рахуючи від вершини: $BE:EM = 2$ (рис. 1).

Медіани ділять трикутник на рівновеликі трикутники: $S_{\triangle ABK} = S_{\triangle KBC}$ (рис. 2).

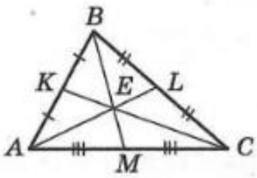


Рис. 1

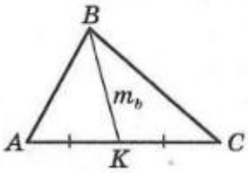


Рис. 2

Властивості бісектрис трикутника

Бісектриси внутрішніх кутів трикутника перетинаються в одній точці, що міститься всередині трикутника, рівновіддалена від трьох його сторін і є центром вписаного кола (рис. 1).

Бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну куту сторону на відрізки, пропорційні двом іншим сторонам: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ (рис. 2).

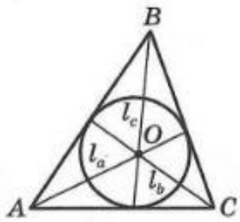


Рис. 1

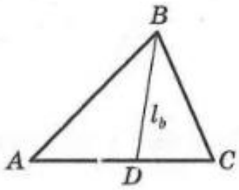
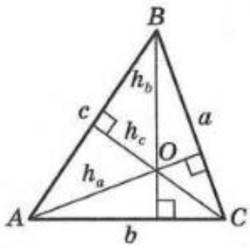


Рис. 2

Властивості висот трикутника

Висоти трикутника перетинаються в одній точці, яка називається ***ортоцентром трикутника***.

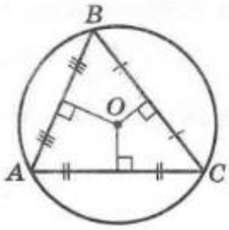
Висоти трикутника обернено пропорційні його сторонам: $h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.



Властивість серединних перпендикулярів

Серединний перпендикуляр — це пряма, що проходить через середину сторони трикутника перпендикулярно до неї.

Три серединних перпендикуляри, проведені до сторін трикутника, перетинаються в одній точці, що є ***центром описаного кола.***



Вписане й описане кола

Радіус вписаного у трикутник ***кола*** — відстань від центра кола до сторін трикутника: $r = \frac{S}{p}$.

Точки дотику вписаного кола до сторін трикутника відтинають на цих сторонах три пари рівних між собою відрізків (рис. 1).

Радіус описаного кола:

$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C} = \frac{abc}{4S}$ (рис. 2)

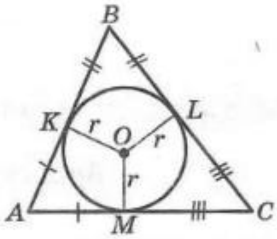


Рис. 1

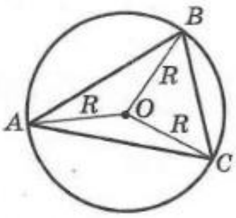
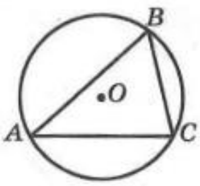
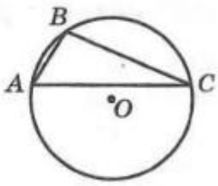
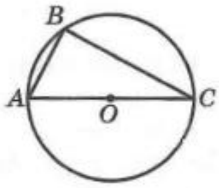


Рис. 2

Можливе розташування центра описаного кола трикутника

Всередині трикутника	Зовні трикутника	На середині сторони трикутника
		
гострокутний трикутник	тупокутний трикутник	прямокутний трикутник

Площа трикутника

За стороною і висотою, опущеною на цю сторону: $S = \frac{1}{2}ah_a$ (рис. 1).

За двома сторонами і кутом між ними: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ (рис. 2).

За трьома сторонами (формула Герона): $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$ (рис. 3).

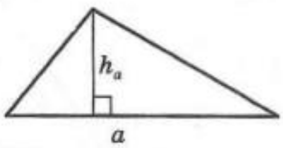


Рис. 1

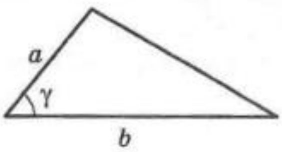


Рис. 2

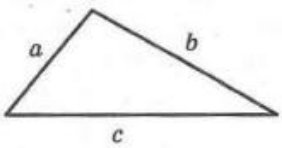


Рис. 3

За півпериметром (p) і радіусом вписаного кола: $S = p \cdot r$ (рис. 4).

За трьома сторонами і радіусом описаного кола: $S = \frac{abc}{4R}$ (рис. 5).

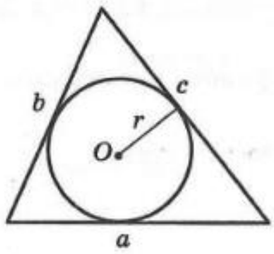


Рис. 4

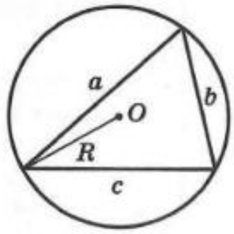
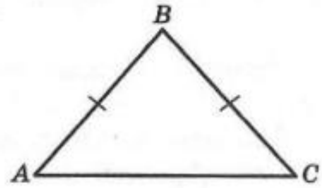


Рис. 5

Рівнобедрений трикутник

Трикутник називається ***рівнобедреним***, якщо в нього дві сторони рівні. Рівні сторони називають ***бічними сторонами***, а третю — ***основою*** рівнобедреного трикутника



Властивості рівнобедреного трикутника

У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні: $\angle A = \angle C$ (рис. 1).

У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, є бісектрисою і висотою (рис. 2).

Рівнобедрений трикутник має одну вісь симетрії (рис. 3).

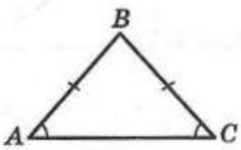


Рис. 1

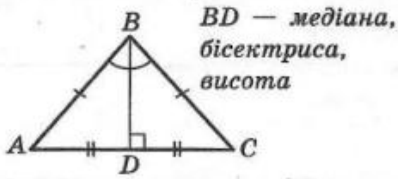


Рис. 2

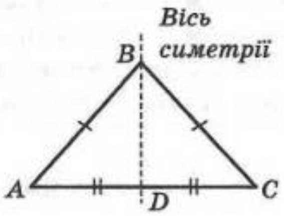
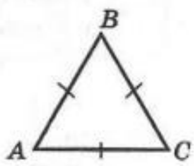


Рис. 3

Рівносторонній трикутник

Трикутник, у якого всі сторони рівні, називається ***рівностороннім***, або ***правильним трикутником***



Властивості рівностороннього трикутника

Усі кути рівні: $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$ (рис. 1).

Кожна медіана збігається з бісектрисою і висотою, що проведені з тієї самої вершини. $m_a = l_a = h_a = \ldots = h_c$ (рис. 2).

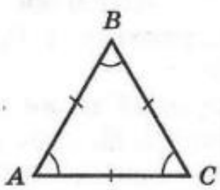


Рис. 1

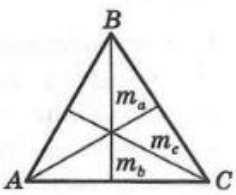


Рис. 2

Центри вписаного і описаного кіл збігаються (рис. 3).

Площа рівностороннього трикутника:

$S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (рис. 4)

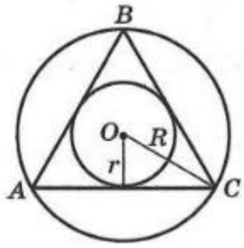


Рис. 3

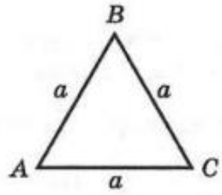


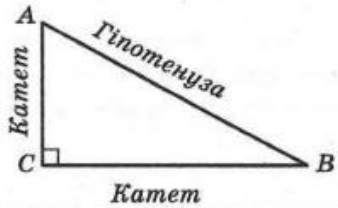
Рис. 4

Прямокутний трикутник

Трикутник називається ***прямокутним***, якщо він має прямий кут.

Сторони, прилеглі до прямого кута, називаються ***катетами***.

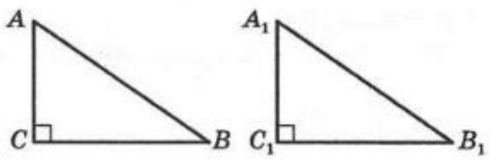
Сторона, протилежна прямому куту, називається ***гіпотенузою***



Ознаки рівності прямокутних трикутників

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

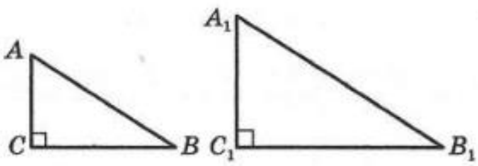
За двома катетами.
За катетом і гіпотенузою.
За катетом і прилеглим гострим кутом.
За катетом і протилежним гострим кутом.
За гіпотенузою і гострим кутом



Ознаки подібності прямокутних трикутників

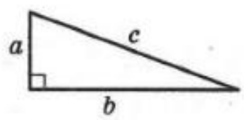
$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

За одним гострим кутом.
За пропорційністю двох катетів.
За пропорційністю катета і гіпотенузи



Теорема Піфагора

У прямокутному трикутнику сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи: $c^2 = a^2 + b^2$.



Наслідки

У прямокутному трикутнику будь-який із катетів менший, ніж гіпотенуза.

Якщо до прямої з однієї точки проведені перпендикуляр і похила, то похила більша, ніж перпендикуляр.

Рівні похилі мають рівні проєкції.

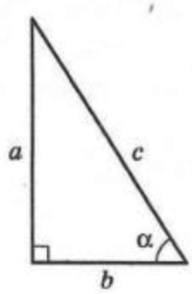
З двох похилих більша та, проєкція якої більша

Співвідношення між елементами прямокутного трикутника

Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи: $\cos\alpha=\frac{b}{c}$.

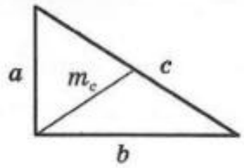
Синусом гострого кута називається відношення протилежного катета до гіпотенузи: $\sin\alpha=\frac{a}{c}$.

Тангенсом гострого кута називається відношення протилежного катета до прилеглого: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$

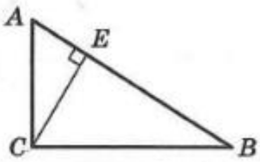


Властивості медіани і висоти прямокутного трикутника

Медіана, проведена з вершини прямого кута, дорівнює половині гіпотенузи: $m_c=\frac{1}{2}c$.

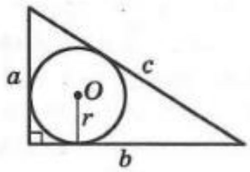


Висота, проведена з вершини прямого кута трикутника, ділить його на два трикутники, подібні до даного: $\triangle ACE \backsim \triangle CBE \backsim \triangle ABC$



Коло, вписане у прямокутний трикутник

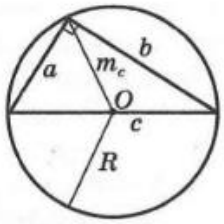
Радіус вписаного кола: $r=\frac{ab}{a+b+c}=\frac{a+b-c}{2}$



Коло, описане навколо прямокутного трикутника

Центр описаного кола збігається із серединою гіпотенузи.

Радіус описаного кола: $R=\frac{c}{2}=m_c$

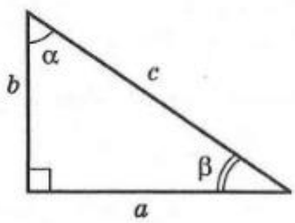


Площа прямокутного трикутника

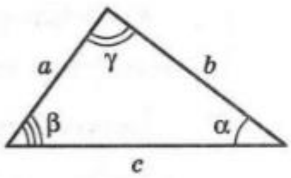
Через катети: $S=\frac{1}{2}ab$.

Через катет і гострий кут: $S=\frac{1}{2}a^2\operatorname{tg}\beta$.

Через гіпотенузу і гострий кут: $S=\frac{1}{4}c^2\sin 2\alpha=\frac{1}{4}c^2\sin 2\beta$



Теорема косинусів

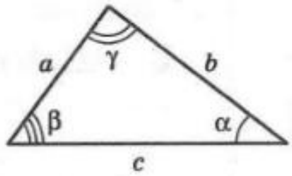


Квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Наслідки

1. Якщо $c^2 > a^2 + b^2$, то кут γ — тупий $(\cos\gamma < 0)$.
2. Якщо $c^2 < a^2 + b^2$, то кут γ — гострий $(\cos\gamma > 0)$.
3. Якщо $c^2 = a^2 + b^2$, то кут γ — прямий.
4. У трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона, проти більшої сторони лежить більший кут

Теорема синусів



Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів.

Коефіцієнт пропорційності дорівнює діаметру описаного кола:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Чотирикутники

Основні означення і властивості

Чотирикутником називається фігура, яка складається з чотирьох точок (***вершин***) і чотирьох відрізків (***сторін***), що послідовно сполучають вершини. При цьому ніякі три з даних точок не повинні лежати на одній прямій, а відрізки, що їх сполучають, не повинні перетинатися (рис. 1).

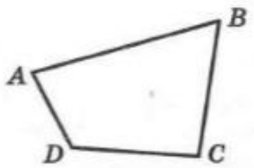
Чотирикутник називається ***опуклим***, якщо він розміщений в одній півплощині відносно прямої, що містить будь-яку його сторону (рис. 2).

Коло, яке дотикається до всіх сторін чотирикутника, називається ***вписаним*** у цей чотирикутник (рис. 3). (Чотирикутник описаний навколо кола.)

Коло, що містить усі вершини чотирикутника, називається ***описаним*** навколо цього чотирикутника (рис. 4). (Чотирикутник вписаний у коло.)

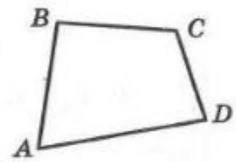
Сума кутів опуклого чотирикутника дорівнює $360°$: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ (рис. 5).

Площа довільного опуклого чотирикутника: $S = \frac{d_1 d_2 \sin\varphi}{2}$, де d_1, d_2 — діагоналі чотирикутника; φ — кут між діагоналями (рис. 6)



A, B, C, D — вершини; AB, BC, CD, DA — сторони

Рис. 1



ABCD — опуклий чотирикутник

Рис. 2

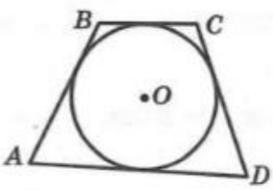


Рис. 3

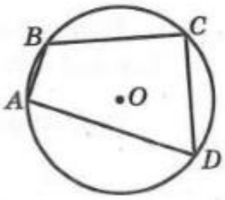


Рис. 4

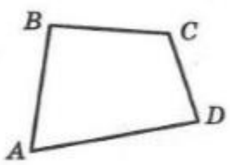


Рис. 5

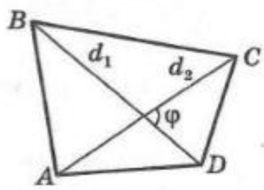


Рис. 6

Описані чотирикутники

Якщо в чотирикутнику суми довжин протилежних сторін рівні, то в нього можна вписати коло: $a+c=b+d$ (рис. 1).

Центр вписаного в чотирикутник кола є точкою перетину всіх чотирьох бісектрис кутів цього чотирикутника (рис. 2).

Точки дотику вписаного кола ділять кожну сторону чотирикутника на два відрізки. Відрізки, які проведені з однієї вершини, рівні: $KB=BL$; $LC=CM$; $MD=DN$; $KA=AN$ (рис. 3).

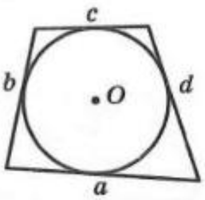
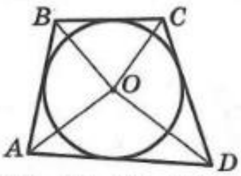


Рис. 1



BO, CO, DO, AO — *бісектриси кутів*
Рис. 2

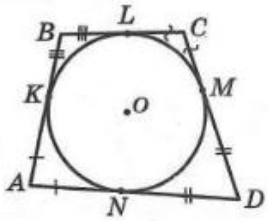
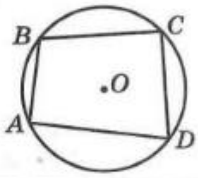


Рис. 3

Вписані чотирикутники

Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180°.

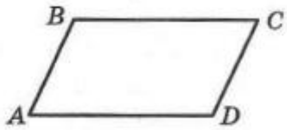
$\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180^\circ$



Паралелограм

Чотирикутник, протилежні сторони якого попарно паралельні, називається ***паралелограмом***.

$AB \parallel CD$; $BC \parallel AD$



Властивості паралелограма

Середина діагоналі паралелограма є його центром симетрії (рис. 1).

Протилежні сторони паралелограма рівні: $AB=CD$; $BC=AD$ (рис. 2).

Протилежні кути паралелограма рівні: $\angle A=\angle C$; $\angle B=\angle D$ (рис. 3).

Сума кутів паралелограма, прилеглих до довільної сторони, дорівнює 180°.

$\angle A+\angle B=\angle B+\angle C=\angle C+\angle D=\angle D+\angle A=180^\circ$ (рис. 4).

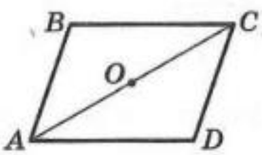


Рис. 1

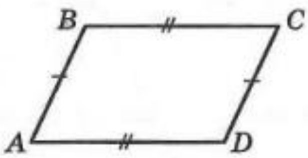


Рис. 2

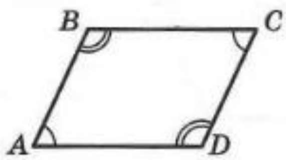


Рис. 3

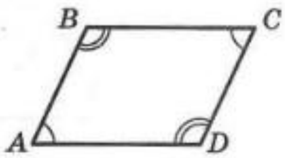


Рис. 4

Діагоналі паралелограма перетинаються й точкою перетину діляться навпіл: $BO = OD$; $AO = OC$ **(рис. 5).**

Кожна діагональ ділить паралелограм на два рівні трикутники: $\triangle ABD = \triangle BDC$ **(рис. 6).**

Дві діагоналі паралелограма ділять його на чотири рівновеликі трикутники: $S_{\triangle ABO} = S_{\triangle OBC} = S_{\triangle OCD} = S_{\triangle AOD}$ **(рис. 7).**

Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін: $e^2 + f^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$ **(рис. 8)**

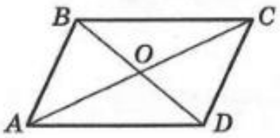


Рис. 5

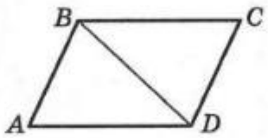


Рис. 6

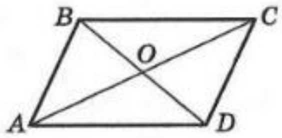
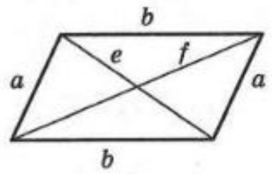


Рис. 7



a, b — сторони;
e, f — діагоналі

Рис. 8

Ознаки паралелограма

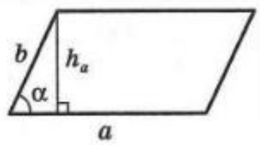
Якщо в чотирикутнику протилежні сторони попарно рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.

Якщо в чотирикутнику протилежні сторони рівні й паралельні, то цей чотирикутник — паралелограм.

Чотирикутник, діагоналі якого в точці перетину діляться навпіл,— паралелограм

Висота паралелограма

Висота паралелограма **— перпендикуляр, проведений із вершини цього паралелограма до неприлеглої сторони;** $h_\alpha = b \sin \alpha$



Площа паралелограма

Через сторону паралелограма і проведену до неї висоту: $S = ah_a$ **(рис. 1).**

Через дві сторони паралелограма й кут між ними: $S = ab\sin\alpha$ **(рис. 2).**

Через діагоналі паралелограма й кут між ними: $S = \dfrac{ef\sin\varphi}{2}$ **(рис. 3).**

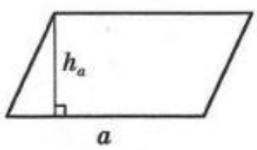


Рис. 1

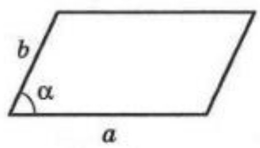


Рис. 2

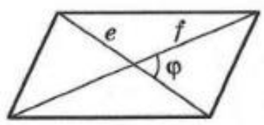
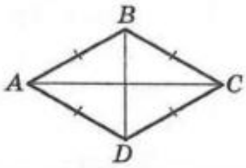


Рис. 3

Ромб

Паралелограм, у якого всі сторони рівні, називається ***ромбом***.
$AB = BC = CD = DA$



Властивості ромба

Діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом: $AC \perp BD$ (рис. 1).

Діагоналі ромба є бісектрисами його кутів: $\angle CAB = \angle CAD = \angle BCA = \angle ACD$, $\angle DBA = \angle DBC = \angle BDA = \angle BDC$ (рис. 2).

У будь-який ромб можна вписати коло із центром у точці перетину його діагоналей (рис. 3).

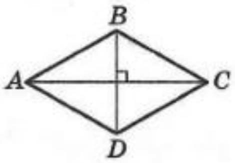


Рис. 1

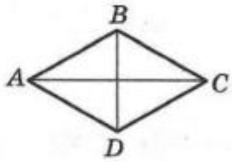


Рис. 2

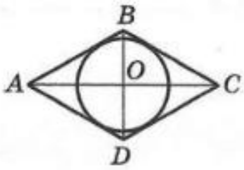


Рис. 3

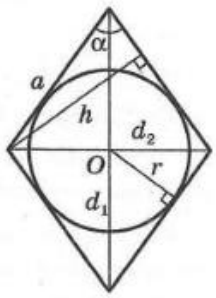
Площа ромба

Через діагоналі: $S = \dfrac{d_1 d_2}{2}$.

Через сторону і кут ромба: $S = a^2 \sin\alpha$.

Через сторону і висоту: $S = ah$.

Через сторону і радіус вписаного кола: $S = 2ar$



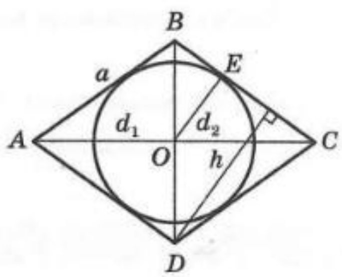
Коло, вписане в ромб

Радіус кола, вписаного в ромб, можна обчислити

Через висоту ромба: $r = \dfrac{h}{2}$.

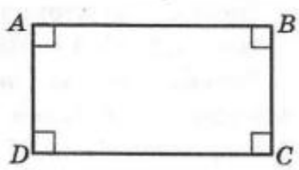
Через діагоналі ромба і сторону: $r = \dfrac{d_1 d_2}{4a}$.

Через відрізки, на які ділить сторону ромба точка дотику: $r = \sqrt{BE \cdot EC}$



Прямокутник

Прямокутник — паралелограм, у якого всі кути прямі



Властивості прямокутника

Діагоналі прямокутника рівні й точкою перетину діляться навпіл (рис. 1).

Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло із центром у точці перетину діагоналей і радіусом, що дорівнює половині діагоналі: $AC=2R$ (рис. 2).

Площа прямокутника:

— через його сторони: $S=ab$;

— через діагоналі і кут між ними: $S=\dfrac{d^2\sin\gamma}{2}$ (рис. 3).

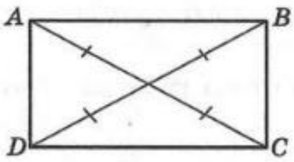


Рис. 1

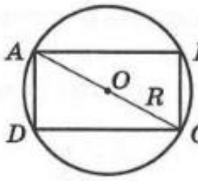


Рис. 2

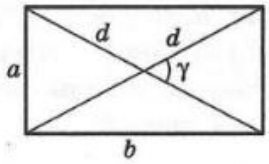
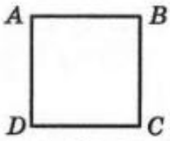


Рис. 3

Квадрат

Квадрат — це прямокутник, у якого всі сторони рівні

$AB=BC=CD=AD$



Властивості квадрата

У квадрата всі кути прямі (рис. 1).

Діагоналі квадрата рівні й перетинаються під прямим кутом (рис. 2).

У квадраті центри вписаного й описаного кіл збігаються й розташовані в точці перетину його діагоналей.

Радіус описаного кола: $R=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Радіус вписаного кола: $r=\dfrac{a}{2}$ (рис. 3).

Площа квадрата: $S=a^2=\dfrac{d^2}{2}$ (рис. 4).

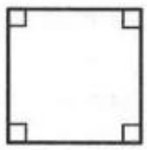


Рис. 1

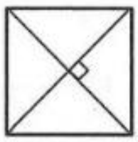


Рис. 2

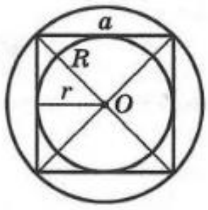


Рис. 3

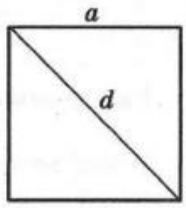


Рис. 4

Трапеція

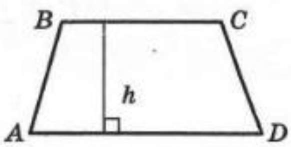
Основні означення

Трапеція — це чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні.

Паралельні сторони називаються ***основами трапеції.***

Непаралельні сторони називаються ***бічними сторонами.***

Домовилися ***висотою трапеції*** називати перпендикуляр, опущений з довільної точки однієї основи трапеції на другу основу (рис. 1).



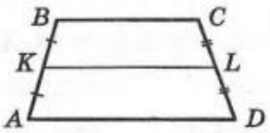
BC, AD — основи; AB, CD — бічні сторони; h — висота

Рис. 1

Середня лінія трапеції — це відрізок, що з'єднує середини бічних сторін. $AK = KB$; $CL = LD$ (рис. 2).

Рівнобічна трапеція — трапеція, у якої бічні сторони рівні: $AB = CD$ (рис. 3).

Прямокутна трапеція — це трапеція, у якої одна бічна сторона перпендикулярна до основ (рис. 4).



KL — середня лінія трапеції

Рис. 2

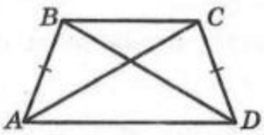


Рис. 3

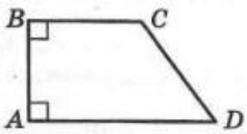


Рис. 4

Властивості трапеції

Коло можна вписати в трапецію, якщо сума її бічних сторін дорівнює сумі основ: $AB + CD = BC + AD$.

Центр вписаного в трапецію кола — точка перетину бісектрис внутрішніх кутів.

Радіус вписаного кола дорівнює половині висоти: $r = \frac{h}{2}$ (рис. 1).

При продовженні бічних сторін трапеції утворюються два подібні трикутники: $\triangle BEC \backsim \triangle AED$ (рис. 2).

Трикутники, утворені основами й відрізками діагоналей, подібні. Коефіцієнт подібності дорівнює відношенню основ: $\triangle BEC \backsim \triangle DEA$; $k = \frac{BC}{AD}$ (рис. 3).

Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі: $KL \parallel BC$; $KL \parallel AD$; $KL = \frac{BC + AD}{2}$ (рис. 4).

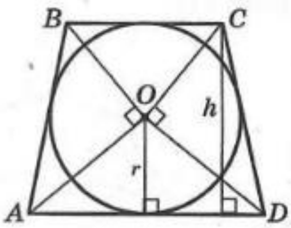


Рис. 1

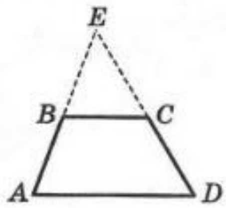


Рис. 2

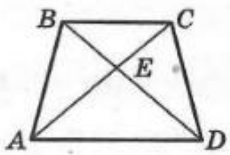


Рис. 3

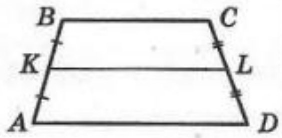


Рис. 4

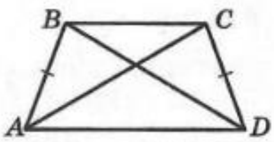


Рис. 5

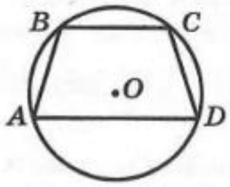


Рис. 6

У рівнобічній трапеції:

— кути при основі рівні: $\angle A = \angle D$; $\angle B = \angle C$;

— діагоналі рівні: $BD = CA$ (рис. 5).

Навколо будь-якої рівнобічної трапеції можна описати коло.

Якщо трапеція вписана в коло, то вона рівнобічна (рис. 6).

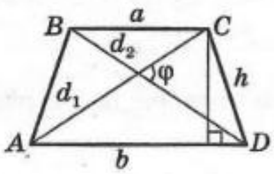


Рис. 7

Площа трапеції:

— через півсуму основ (середню лінію трапеції) і висоту: $S = \frac{a+b}{2}h$;

— через діагоналі і кут між ними: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$ (рис. 7).

Многокутники

Основні означення

Многокутник — замкнена ламана лінія, яка утворюється, якщо взяти n будь-яких точок A_1, A_2, ..., A_n і з'єднати прямолінійним відрізком кожну з них з наступною, а останню — з першою. (рис. 1).

Точки A_1, A_2, ..., A_n називаються ***вершинами*** многокутника, а відрізки A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 — його ***сторонами***.

Периметром многокутника називається сума всіх його сторін: $P = A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1$.

Плоским многокутником, або ***многокутною областю*** називається скінченна частина площини, обмежена многокутником (рис. 2).

Коло, що дотикається до всіх сторін многокутника, називається ***вписаним*** у цей многокутник (рис. 3). Коло, що містить усі вершини многокутника, називається ***описаним*** навколо цього многокутника (рис. 4).

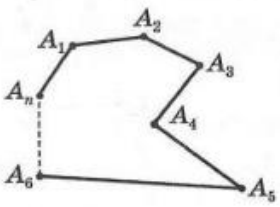


Рис. 1

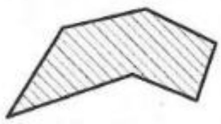


Рис. 2

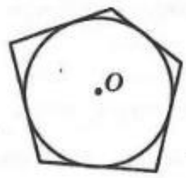


Рис. 3

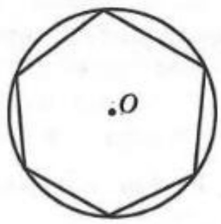


Рис. 4

Опуклі многокутники

Многокутник називається ***опуклим***, якщо він лежить в одній півплощині відносно будь-якої прямої, що містить його сторону (рис. 1).

Кутом опуклого многокутника при даній вершині називається кут, утворений його сторонами, що збігаються у цій вершині.

Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180°(n-2)$:
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F = 4 \cdot 180°$ (рис. 2).

Зовнішнім кутом опуклого многокутника при даній вершині називається кут, суміжний внутрішньому куту многокутника при даній вершині.

Сума зовнішніх кутів будь-якого опуклого n-кутника дорівнює 360°: $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = 360°$ (рис. 3).

Кількість діагоналей опуклого n-кутника дорівнює $\dfrac{n(n-3)}{2}$ (рис. 4).

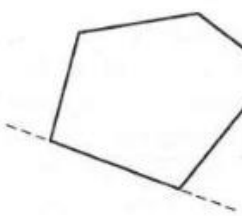


Рис. 1

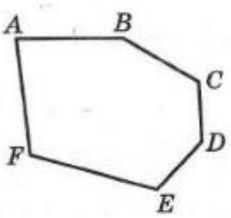


Рис. 2

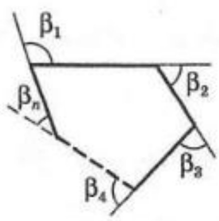


Рис. 3

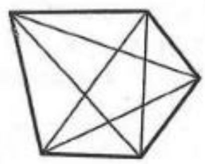


Рис. 4

Правильні многокутники

Опуклий многокутник називається ***правильним***, якщо всі його сторони рівні і всі його внутрішні кути рівні (рис. 1).

Внутрішній кут правильного n-кутника дорівнює: $\alpha = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$.

Центри вписаного у правильний многокутник кола і кола, описаного навколо нього, збігаються.

Радіуси описаного і вписаного кіл: $R = \dfrac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$; $r = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$ (рис. 2).

Площа правильного n-кутника:

— через сторону многокутника: $S = \dfrac{na^2}{4\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$;

— через радіус описаного кола: $S = \dfrac{nR^2}{2}\sin\dfrac{360^\circ}{n}$;

— через радіус вписаного кола: $S = nr^2 \operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$

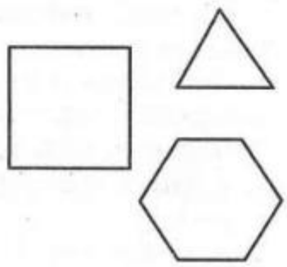


Рис. 1

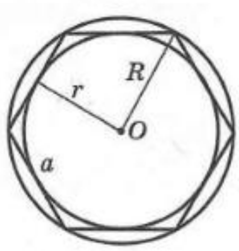


Рис. 2

Геометричні переміщення

Рух

Рух — це перетворення простору, що зберігає відстань між точками.
Приклади руху: паралельне перенесення, поворот

Властивості руху

1. Два рухи, що виконуються послідовно, дають новий рух.
2. Точки, що лежать на прямій, під час руху переходять у точки, які лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.
3. Під час руху зберігаються кути між півпрямими

Рівні фігури

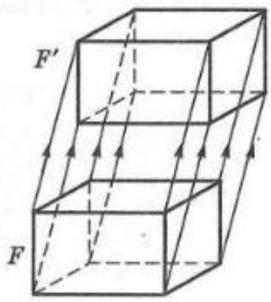
Дві фігури називаються ***рівними***, якщо вони суміщаються переміщенням

Паралельне перенесення

Паралельне перенесення — перетворення простору, при якому всі точки переміщуються в тому самому напрямі на ту саму відстань.

При паралельному перенесенні пряма переходить у паралельну пряму (або в себе).

Для будь-яких двох точок M і M' існує одне і лише одне паралельне перенесення, при якому точка M переходить у точку M'



Поворот

Поворот (обертання) — вид руху, при якому принаймні одна точка простору залишається нерухомою.

При повороті на площині навколо даної точки (***центра повороту***) кожний промінь, що виходить з даної точки, повертається на той самий кут в тому самому напрямі (рис. 1).

Поворот навколо осі на кут φ — це перетворення, при якому:

1) є єдина пряма l, всі точки якої переходять самі в себе (***вісь повороту***, або ***вісь обертання***);
2) будь-яка точка A, що не належить l, переходить у таку точку A', що точки A і A' лежать у площині α, яка перпендикулярна до l, і кут $\varphi = \angle AOA'$ є сталим за величиною і напрямом (рис. 2).

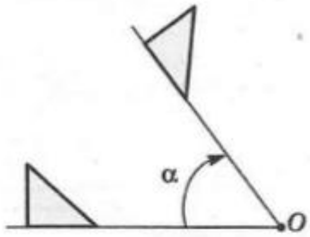


Рис. 1

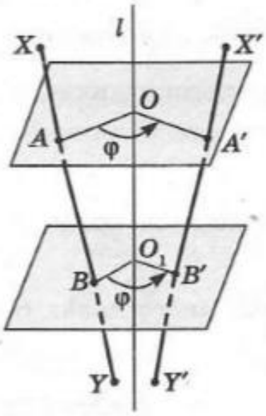


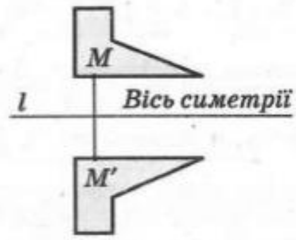
Рис. 2

Центральна симетрія

Поворот навколо точки O на кут 180° називається ***центральною симетрією*** відносно точки O (***центра симетрії***)

Осьова симетрія

Поворот навколо осі на кут $\varphi = 180°$ називається ***симетрією відносно прямої***, або ***осьовою симетрією***, вісь повороту — ***віссю симетрії***



Розділ VI. Стереометрія

Прямі і площини у просторі

Паралельність прямих і площин

Взаємне розміщення прямих у просторі

Дві прямі у просторі можуть перетинатися, бути паралельними або мимобіжними.

Взаємне розміщення прямої і площини у просторі

Пряма може перетинатися з площиною або бути паралельною площині.

Взаємне розміщення площин у просторі

Дві площини у просторі можуть: перетинатися, збігатися, не мати спільних точок — бути паралельними

Ознаки паралельності прямих і площин у просторі

Для того щоб пряма p була паралельною площині α, достатньо, щоб ця пряма була паралельна хоча б одній прямій q, що лежить у площині α.

Якщо пряма p паралельна площині α, то вона паралельна лінії перетину α з будь-якою площиною β, що проходить через p (рис. 1).

Пряма p, паралельна кожній з двох площин α і β, що перетинаються, паралельна лінії їх перетину q (рис. 2)

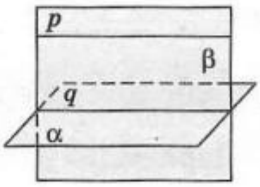


Рис. 1

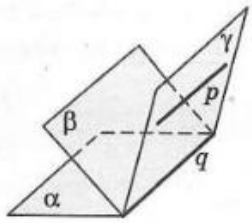
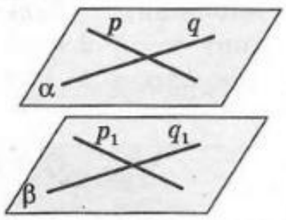


Рис. 2

Ознака паралельності двох площин

Якщо дві прямі, що перетинаються й лежать у площині α, відповідно паралельні двом прямим, які перетинаються й лежать у площині β, то ці площини паралельні



Властивості паралельних прямих у просторі

Прямі, одержані при перетині двох паралельних площин третьою, паралельні між собою: $\alpha \parallel \beta$; $q \parallel p$ (рис. 1).

Дві прямі, кожна з яких паралельна третій, паралельні між собою (рис. 2).

$$\left.\begin{matrix} p \parallel q \\ l \parallel q \end{matrix}\right\} \Rightarrow p \parallel l$$

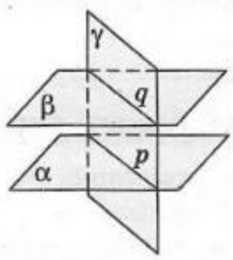


Рис. 1

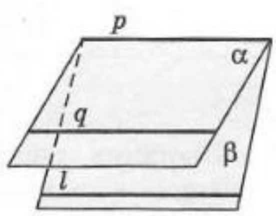


Рис. 2

Паралельне проєктування

При *паралельному проєктуванні* задаються:

— площина проєктування α,

— напрям проєктування (пряма l)

Ортогональне (прямокутне) проєктування — паралельне проєктування фігури в напрямі прямої l, перпендикулярної до площини проєкції.

Паралельною проєкцією точки A на площину α називається точка перетину прямої p, що проходить через точку A паралельно напряму проєктування, з площиною проєктування α (рис. 1): $A_1 = \text{пр}_\alpha A$.

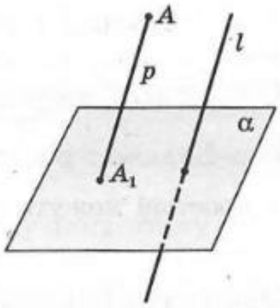


Рис. 1

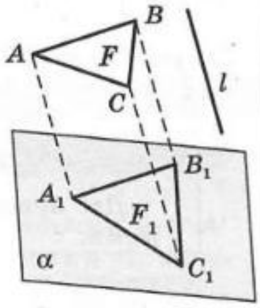


Рис. 2

Паралельні проєкції всіх точок фігури F на площину α утворюють фігуру F_1, яка називається ***паралельною проєкцією фігури F на площину α*** (рис. 2). $F_1 = \text{пр}_\alpha F$

Властивості паралельних проєкцій

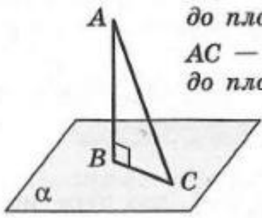
1. Паралельна проєкція прямої — це або точка, або пряма.
2. Паралельні проєкції паралельних прямих p і q, не паралельних напряму проєктування l, паралельні.
3. Відношення довжин відрізків прямої дорівнює відношенню довжин їх паралельних проєкцій

Перпендикулярність прямих і площин

Перпендикуляр і похила до площини

Перпендикуляр, проведений із даної точки на дану площину, — відрізок, що з'єднує дану точку з точкою площини і лежить на прямій, яка перпендикулярна до площини.

Похила, проведена з даної точки до даної площини, — будь-який відрізок, що з'єднує дану точку з точкою площини і не є перпендикуляром до цієї площини

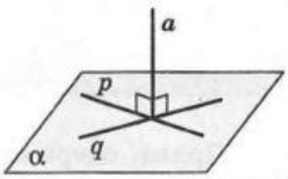


AB — перпендикуляр до площини α

AC — похила до площини α

Ознака перпендикулярності прямої і площини

Для того щоб пряма була перпендикулярною до площини, достатньо, щоб вона була перпендикулярною до двох будь-яких прямих, що перетинаються і лежать у цій площині



Властивості перпендикулярів до площини

Площина, перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, перпендикулярна і до другої прямої.

Прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні між собою

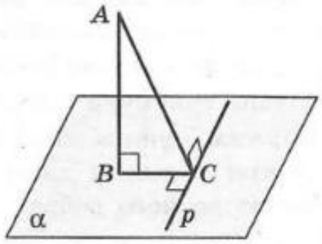
Теорема про три перпендикуляри

Пряма теорема

Пряма, що проведена на площині перпендикулярно до проєкції певної похилої, перпендикулярна й до самої похилої.

Обернена теорема

Пряма, що проведена на площині перпендикулярно до похилої, перпендикулярна й до ортогональної проєкції цієї похилої

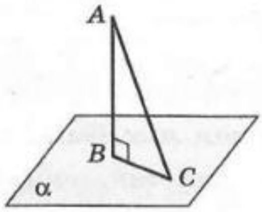


Відстані в просторі

Відстань від точки до площини

Якщо з точки A, що лежить поза площиною α, проведені перпендикуляр і похила до цієї площини, то:

1) перпендикуляр коротший за будь-яку похилу;
2) рівні похилі мають рівні проєкції і рівним проєкціям відповідають рівні похилі;
3) з двох похилих, що мають нерівні проєкції, довша та, проєкція якої довша.



Відстань від точки до площини, що не містить цю точку, дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з даної точки на дану площину

Відстань між мимобіжними прямими

Відстань між мимобіжними прямими дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки однієї прямої на площину, що проходить через другу пряму паралельно першій

Кути в просторі

Кути між прямими в просторі

Кутом між прямими, що перетинаються, називається найменший із кутів, що утворилися в результаті перетину даних прямих.

Кут між паралельними прямими дорівнює нулю.

Кутом між мимобіжними прямими називається кут між прямими, що перетинаються, паралельними даним мимобіжним прямим.

Кут між прямою і площиною

Кутом між похилою (AC) ***і площиною*** (α) називається кут між похилою та її ортогональною проєкцією (BC) на цю площину (рис. 1).

Кут між похилою та її ортогональною проєкцією менший, ніж кут між похилою і будь-якою іншою прямою, що проведена у цій площині через основу похилої (рис. 2).

Пряма, перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, перпендикулярна і до другої.

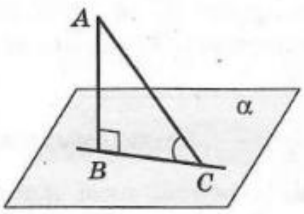


Рис. 1

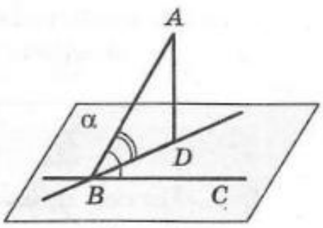


Рис. 2

Площини α і β, перпендикулярні до тієї самої прямої p, паралельні між собою.

Похила до двох паралельних площин утворює з ними рівні кути

Двогранні кути

Двогранним кутом називається фігура, утворена двома півплощинами зі спільною граничною прямою.

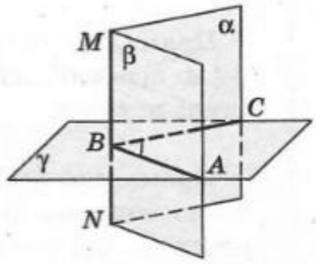
Півплощини називаються ***гранями двогранного кута***, а їхня спільна гранична пряма — ***ребром двогранного кута***.

Лінійним кутом двогранного кута називається кут, утворений при перетині двогранного кута площиною, перпендикулярною до його ребра.

Усі лінійні кути двогранного кута рівні.

Градусною мірою двогранного кута називається градусна міра його лінійного кута.

Лінійні кути, що відповідають рівним двогранним кутам, рівні, і навпаки, рівним лінійним кутам відповідають рівні двогранні кути



α, β — грані двогранного кута, MN — ребро двогранного кута. $\angle ABC$ — лінійний кут двогранного кута з ребром MN

Кут між площинами. Перпендикулярні площини

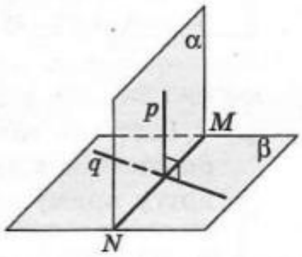
Кутом між двома площинами, що перетинаються, називається найменший з двогранних кутів, утворених цими площинами. $0° \leqslant (\widehat{\alpha,\beta}) \leqslant 90°$

Площини α і β, кут між якими дорівнює $90°$, називаються ***перпендикулярними*** $(\alpha \perp \beta)$.

Якщо дві площини паралельні, то кут між ними вважається рівним $0°$.

Площина α, що проходить через перпендикуляр p до іншої площини β, перпендикулярна до площини β.

Якщо дві площини α і β взаємно перпендикулярні, то пряма p, проведена в одній із цих площин перпендикулярно до лінії їх перетину, перпендикулярна і до другої площини



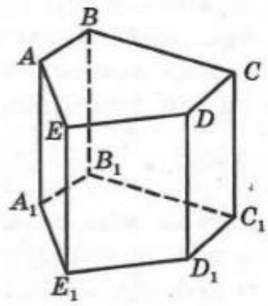
Многогранники

Призма і паралелепіпед

Призмою називається многогранник, поверхня якого є об'єднанням двох рівних многокутників, розміщених у паралельних площинах (***основ призми***), і паралелограмів (***бічних граней***), число яких дорівнює числу сторін основи.

Об'єднання граней, що не є основами призми, називається її ***бічною поверхнею***

Призма називається ***прямою***, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площин основ (рисунок). Бічні грані прямої призми — прямокутники



Прямокутний паралелепіпед

Пряма призма, в основі якої лежить прямокутник, називається ***прямокутним паралелепіпедом***.

Середина будь-якої діагоналі паралелепіпеда є центром його симетрії.

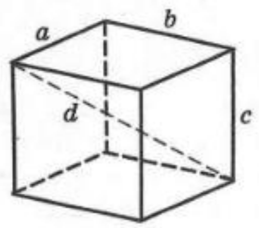
Протилежні грані паралелепіпеда рівні й паралельні.

Усі діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і діляться нею навпіл

Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, називаються його ***вимірами***.

Прямокутний паралелепіпед, у якого всі три виміри рівні, називається ***кубом***.

У прямокутному паралелепіпеді квадрат довжини діагоналі дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів



$d^2=a^2+b^2+c^2$

Площа поверхні та об'єм прямої призми

Площа бічної поверхні: $S_б=P\cdot l$, де P — периметр основи; l — довжина бічного ребра.

Площа повної поверхні: $S_п=S_б+2S_о$, де $S_о$ — площа основи.

Розгортка поверхні прямої призми являє собою плоску фігуру, складену з бічних граней (прямокутників) і двох рівних між собою многокутників основ.

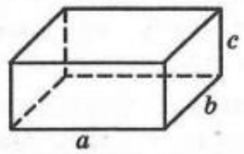
Об'єм: $V=S\cdot l$, де S — площа основи; l — довжина бічного ребра

Площа поверхні та об'єм прямокутного паралелепіпеда

Площа бічної поверхні: $S_б=2c(a+b)$.

Площа повної поверхні: $S_п=2(ac+bc+ab)$.

Об'єм: $V=abc$



Піраміда

Пірамідою називається многогранник, однією з граней якого є многокутник (***основа піраміди***), а інші грані (***бічні грані***) — трикутники зі спільною вершиною (***вершина піраміди***).

Перпендикуляр, проведений з вершини піраміди на площину її основи, називається ***висотою піраміди***.

Об'єм піраміди: $V=\frac{1}{3}S_о\cdot h$, де $S_о$ — площа основи; h — висота.

Площа повної поверхні піраміди: $S_п=S_б+S_о$, де $S_б$ — площа бічної поверхні (сума площ бічних граней), $S_о$ — площа основи.

Розгортка поверхні піраміди являє собою плоску фігуру, складену з бічних граней (трикутників) і многокутника основи

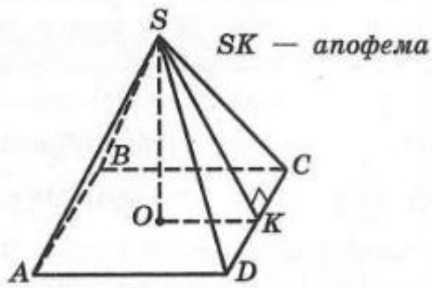
$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ — основа, SO — висота

Правильна піраміда

Піраміда називається ***правильною***, якщо в її основі лежить правильний многокутник і висота піраміди проходить через центр основи.

Бічні грані правильної піраміди — рівні між собою рівнобедрені трикутники, висота кожного із цих трикутників називається ***апофемою***.

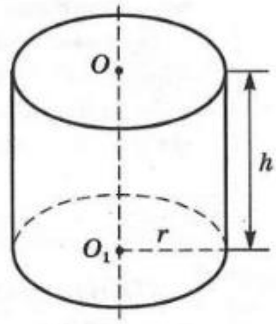
Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра основи на апофему



Тіла обертання

Циліндр

Циліндром (точніше, ***круговим циліндром***) називається тіло, яке складається з двох кругів, що не лежать в одній площині й суміщаються паралельним перенесенням (***основ циліндра***), і всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих кругів (***твірних циліндра***).



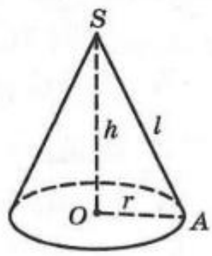
Круговий циліндр, у якого основи перпендикулярні до твірної і являють собою круги, називається ***прямим круговим циліндром*** (часто називають просто ***циліндром***).

Об'єм такого циліндра: $V=\pi r^2h$. ***Площа бічної поверхні:*** $S_б=2\pi rh$.

Площа повної поверхні: $S_п=2\pi r(r+h)$, де r — радіус основи, h — висота циліндра

Конус

Конусом (точніше, ***круговим конусом***) називається тіло, яке складається з круга (***основи конуса***), точки, що не належить площині цього круга (***вершини конуса***), і всіх відрізків, що сполучають вершину конуса з точками основи (***твірних***).



Перпендикуляр, проведений з вершини конуса на площину основи, називається ***висотою конуса***.

Частина конічної поверхні, що розташована між вершиною і площиною основи, називається ***бічною поверхнею конуса***.

Круговий конус називається ***прямим круговим***, якщо його вершина ортогонально проєктується в його центр. (Часто називають просто ***конусом***.)

Прямий круговий конус можна утворити обертанням прямокутного трикутника навколо одного з його катетів. При цьому обертанні другий катет опише основу конуса, а гіпотенуза — бічну поверхню конуса.

Довжина твірної: $l=\sqrt{h^2+r^2}$. ***Об'єм:*** $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$. ***Площа бічної поверхні:*** $S_б=\pi rl$.

Площа повної поверхні: $S_п=\pi r(l+r)$, де r — радіус кола основи, h — висота конуса.

Площі перерізів конуса, паралельних його основі, відносяться як квадрати відстаней від них до вершини конуса.

Сфера і куля

Сфера — це замкнена поверхня, що складається з усіх точок, однаково віддалених від однієї точки (***центра сфери***) (рис. 1).

Відрізок, що з'єднує центр сфери з будь-якою її точкою, називається ***радіусом сфери***.

Площа сфери: $S=4\pi R^2$.

Частина простору, що обмежена сферою і містить її центр, називається ***кулею***. ***Об'єм кулі:*** $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Рис. 1

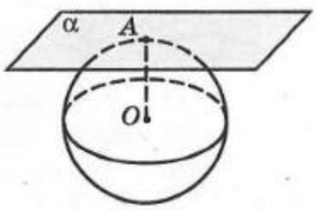


Рис. 2

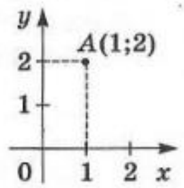
Площина, що має з кулею (сферою) тільки одну спільну точку, називається ***дотичною*** до кулі (α), а та, що має більше ніж одну спільну точку,— ***січною площиною*** (рис. 2)

Розділ VII. Координати і вектори

Декартові координати на площині й у просторі

На площині

Дві взаємно перпендикулярні осі координат (вісь абсцис Ox, вісь ординат Oy) зі спільним початком відліку.

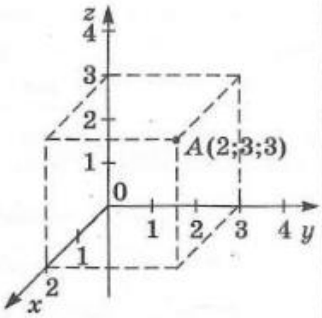


Кожній точці площини ставиться у відповідність пара чисел $(x_A; y_A)$ — координати проекцій точки на відповідні осі координат

У просторі

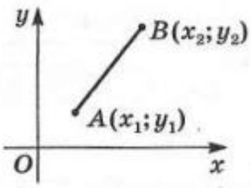
Три взаємно перпендикулярні осі координат (вісь абсцис Ox, вісь ординат Oy, вісь аплікат Oz) зі спільним початком відліку.

Кожній точці простору ставиться у відповідність трійка чисел $(x_A; y_A; z_A)$ — координати проекцій точки на відповідні осі координат



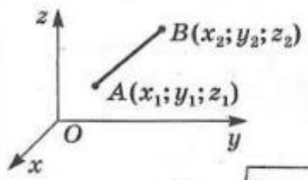
Відстань між точками

На площині



$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

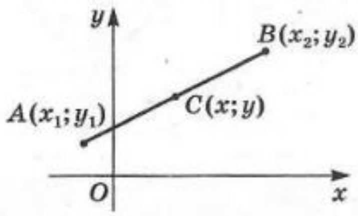
У просторі



$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Координати середини відрізка

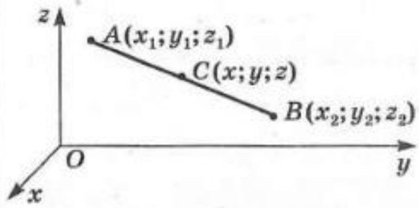
На площині



$$x=\frac{x_1+x_2}{2};$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

У просторі



$$x=\frac{x_1+x_2}{2};$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2};$$

$$z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

Окремі випадки розміщення точок у просторі

Точка лежить на осі	Ox	Oy	Oz
Координати точки	$(x;\ 0;\ 0)$	$(0;\ y;\ 0)$	$(0;\ 0;\ z)$
Точка лежить на площині	xOy	yOz	xOz
Координати точки	$(x;\ y;\ 0)$	$(0;\ y;\ z)$	$(x;\ 0;\ z)$

Симетрія відносно початку координат і координатних площин

Симетрія відносно початку координат

Координати точки, симетричної даній точці відносно початку координат, є протилежними числами до координат даної точки.

Приклад. Дана точка $A(1;2;3)$. Знайти точку, симетричну точці A відносно початку координат. *Відповідь:* точка, симетрична точці A відносно початку координат, — це точка з координатами $(-1;-2;-3)$.

Симетрія відносно координатних площин

Щоб знайти координати точки, симетричної даній точці відносно координатної площини, треба змінити знак однієї координати даної точки на протилежний. Змінюється знак тієї координати, яка відсутня в позначенні координатної площини.

Приклад. Дана точка $A(1;2;3)$. Знайти точку, симетричну точці A відносно координатних площин. *Відповідь:* точка, симетрична точці A відносно площини xOy, — це точка з координатами $(1;2;-3)$; відносно площини yOz, — це точка з координатами $(-1;2;3)$; відносно площини xOz, — це точка з координатами $(1;-2;3)$.

Рівняння прямої

Загальне рівняння прямої: $ax+by+c=0$, де $a\neq0$ або $b\neq0$ (рис. 1).

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $y=kx+b$, де $k=\operatorname{tg}\alpha$ (рис. 2).

Рівняння прямої у відрізках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ $(a\neq0,\ b\neq0)$ (рис. 3).

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ (рис. 4)

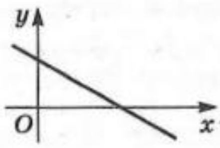


Рис. 1

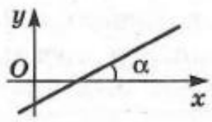


Рис. 2

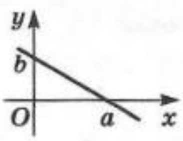


Рис. 3

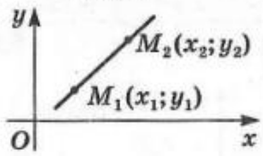


Рис. 4

Рівняння кола

Із центром у початку координат: $x^2+y^2=R^2$.

Із центром у точці $(x_0;y_0)$: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

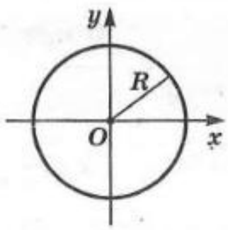


Рис. 1

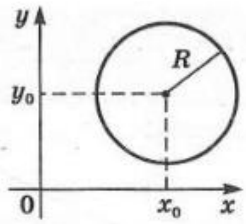


Рис. 2

Рівняння сфери

Із центром у початку координат: $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Із центром у точці $(x_0;y_0;z_0)$:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

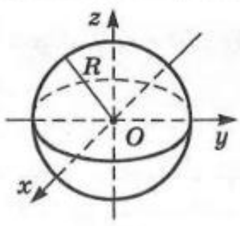


Рис. 1

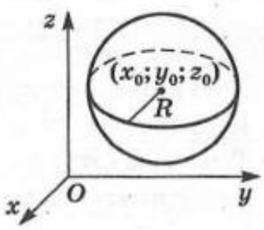


Рис. 2

Вектори

Основні означення

Скаляр (скалярна величина) — величина, кожне значення якої можна виразити дійсним числом

Скаляри
- — довжина;
- — площа;
- — об'єм

Вектор — напрямлений відрізок прямої, у якого один кінець (точка A) називається ***початком вектора***, другий кінець (точка B) — ***кінцем вектора***.

Позначення вектора: $\overrightarrow{AB}$, $\overline{AB}$, $\vec{a}$, $\bar{a}$ (рис. 1).

Модуль вектора — скалярна величина, що дорівнює відстані між початком і кінцем вектора (довжині вектора).

Позначення модуля вектора: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $|\vec{a}|$ (рис. 2).

Нульовий вектор — вектор, початок і кінець якого збігаються (рис. 3).

Два вектори називаються ***рівними***, якщо вони мають рівні модулі й однаково напрямлені (рис. 4).

Два вектори називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать на одній або на паралельних прямих (рис. 5).

Два однаково напрямлені колінеарні вектори називаються ***співнапрямленими*** (рис. 6).

Два неоднаково напрямлені колінеарні вектори називаються ***протилежно напрямленими*** (рис. 7).

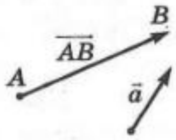


Рис. 1

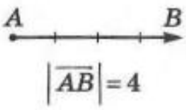


Рис. 2

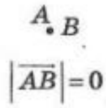


Рис. 3

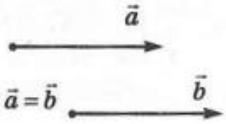


Рис. 4

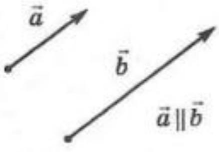


Рис. 5

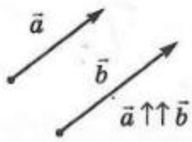


Рис. 6

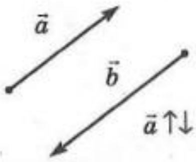
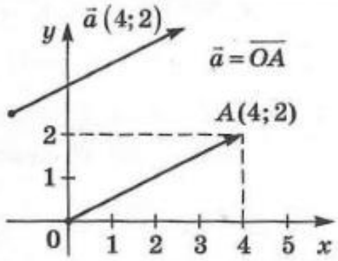


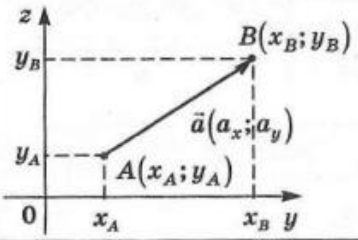
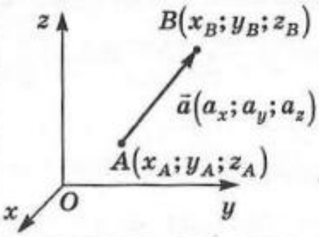
Рис. 7

Координати вектора

Координатами вектора називаються координати кінця рівного йому вектора, відкладеного від початку координат



Обчислення координат і модуля вектора

На площині	У просторі
 $a_x = x_B - x_A$, $a_y = y_B - y_A$, $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$	 $a_x = x_B - x_A$, $a_y = y_B - y_A$, $a_z = z_B - z_A$, $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Лінійні операції над векторами

Сума векторів

Правило трикутника

Сумою $\vec{a}+\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, проведений з початку вектора $\vec{a}$ у кінець вектора $\vec{b}$, якщо кінець вектора $\vec{a}$ і початок вектора $\vec{b}$ суміщені (рис. 1).

$$\vec{a}(a_x;a_y)+\vec{b}(b_x;b_y)=\vec{c}(a_x+b_x;a_y+b_y)$$

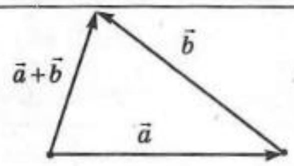


Рис. 1

Правило паралелограма

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відкладені від спільного початку, то їх сумою буде вектор, що збігається з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 2).

Правило многокутника

Якщо до кінця кожного вектора-доданка прикласти початок наступного, то вектор, що йде з початку першого в кінець останнього вектора-доданка, і буде вектором-сумою всіх цих векторів-доданків (рис. 3).

Правило паралелепіпеда

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ відкладені від спільного початку, то їх сумою буде вектор, що збігається з діагоналлю паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ (рис. 4).

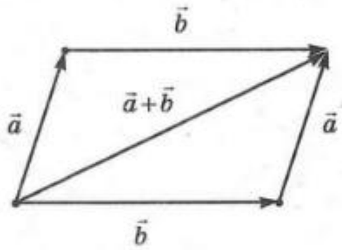


Рис. 2

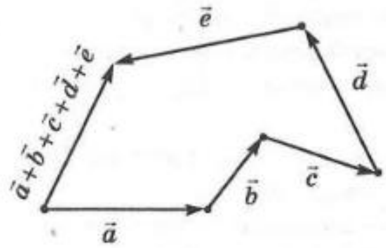


Рис. 3

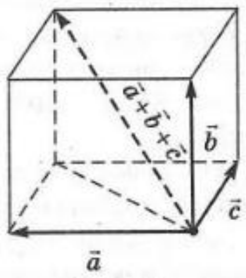


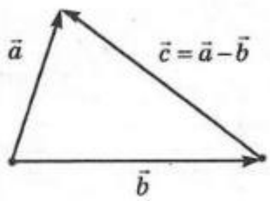
Рис. 4

Властивості операції додавання векторів

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переставний закон).
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сполучний закон).
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ (наявність нульового елемента).
4. $\vec{a}+(-\vec{a})=0$ (наявність протилежного елемента)

Різниця векторів

Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$ такий, що $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$.

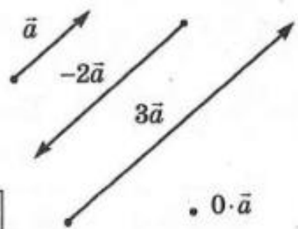


На площині:	У просторі:
$\vec{a}(a_x;a_y)-\vec{b}(b_x;b_y)=\vec{c}(a_x-b_x;a_y-b_y)$	$\vec{a}(a_x;a_y;a_z)-\vec{b}(b_x;b_y;b_z)=$ $=\vec{c}(a_x-b_x;a_y-b_y;a_z-b_z)$

Множення вектора на число

Добутком $\lambda\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на число λ у разі $\lambda\neq 0$, $\vec{a}\neq 0$ називається вектор, колінеарний $\vec{a}$, модуль якого дорівнює $|\lambda||\vec{a}|$ і який напрямлений у той самий бік, що й вектор $\vec{a}$, якщо $\lambda>0$, і у протилежний бік, якщо $\lambda<0$.

Якщо $\lambda=0$ або $\vec{a}=\vec{0}$, то $\lambda\vec{a}=\vec{0}$.



На площині:	У просторі:
$\lambda\cdot\left(\overline{a_x;a_y}\right)=\left(\overline{\lambda a_x;\lambda a_y}\right)$	$\lambda\cdot\left(\overline{a_x;a_y;a_z}\right)=\left(\overline{\lambda a_x;\lambda a_y;\lambda a_z}\right)$

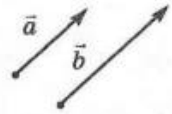
Властивості операції множення вектора на число

1. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ (розподільний закон відносно складання векторів).
2. $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ (розподільний закон відносно складання чисел).
3. $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$ (сполучний закон).
4. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ (множення на одиницю)

Умова колінеарності векторів

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, якщо їх відповідні координати пропорційні

На площині:	У просторі:
$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=k$	$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}=k$



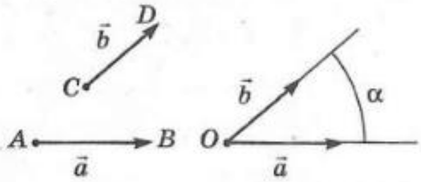
$\vec{a}\parallel\vec{b}$

$\vec{b}=k\vec{a}$

Кут між векторами

Кутом між векторами називається кут між такими векторами, що рівні даним і мають спільний початок.

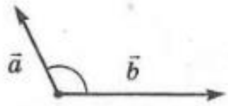
$\alpha=(\vec{a},\vec{b})=(\widehat{\vec{a};\vec{b}})$



Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними

На площині:	У просторі:
$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$



$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}})$

Властивості скалярного добутку

1. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$
2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
3. $(x\vec{a})\cdot\vec{b}=x(\vec{a}\cdot\vec{b})$
4. $(\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{b}$