Теорема косинусів

Геометрія, 9 клас

Перевірка домашнього завдання

$$б)\cos(90^\circ-\alpha)+\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha+\sin\alpha=2\cdot\sin\alpha$$

$$г)\mathrm{ctg}(90^\circ-\beta)-\mathrm{tg}(180^\circ-\beta)=\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\beta=2\cdot\mathrm{tg}\beta$$

$$б)5\cdot\sin30^\circ+\mathrm{ctg}135^\circ=5\cdot\frac{1}{2}-1=2{,}5-1=1{,}5$$

$$г)3\cos60^\circ tg45^\circ tg60^\circ=3\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{3}=1{,}5\sqrt{3}$$

Перевірка домашнього завдання

$$\textit{Дано}: \ 90^\circ < \alpha < 180^\circ; \ \sin\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\textit{Знайти}: \ \cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha, \operatorname{ctg}\alpha$$

Розв'язання

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \quad ; \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Так як $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ *то* $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

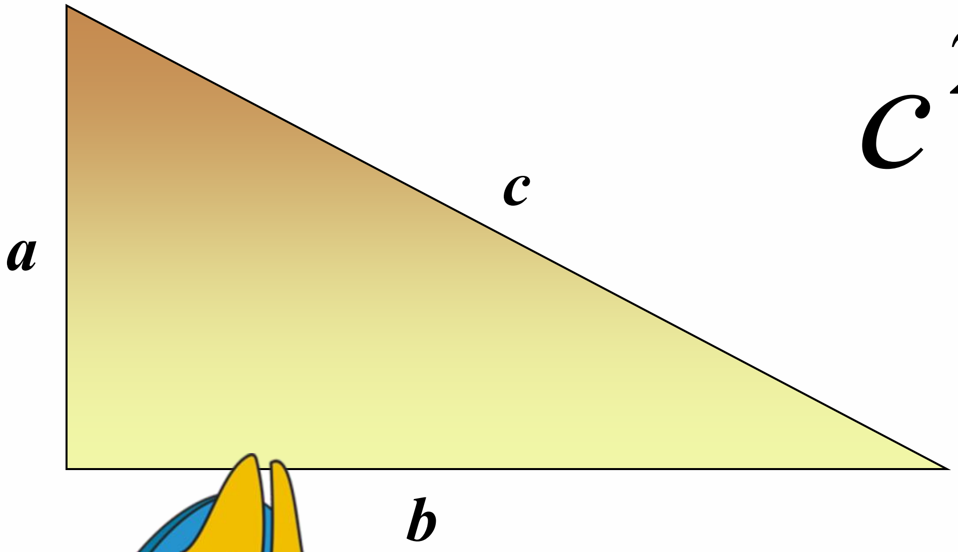
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{3} : \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -2\sqrt{2}$$

Актуалізація опорних знань

- ***Які види трикутників ви знаєте?***
- ***Який трикутник називається прямокутним?***
- ***Як називаються сторони прямокутного трикутника?***
- ***Яка відома теорема виражає зв’язок між сторонами прямокутного трикутника?***

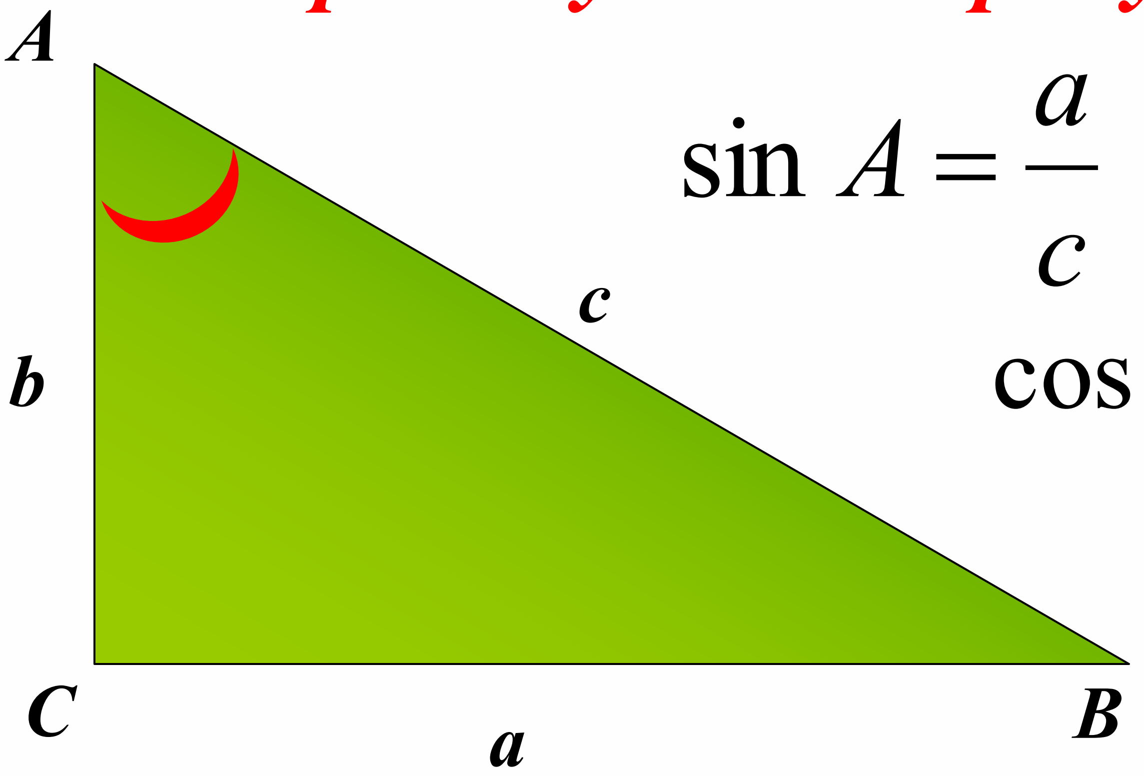
Теорема Піфагора



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Квадрат гіпотенузи дорівнює суми квадратів катетів

Дати означення синуса, косинуса, тангенса, котангенса гострого кута прямокутного трикутника



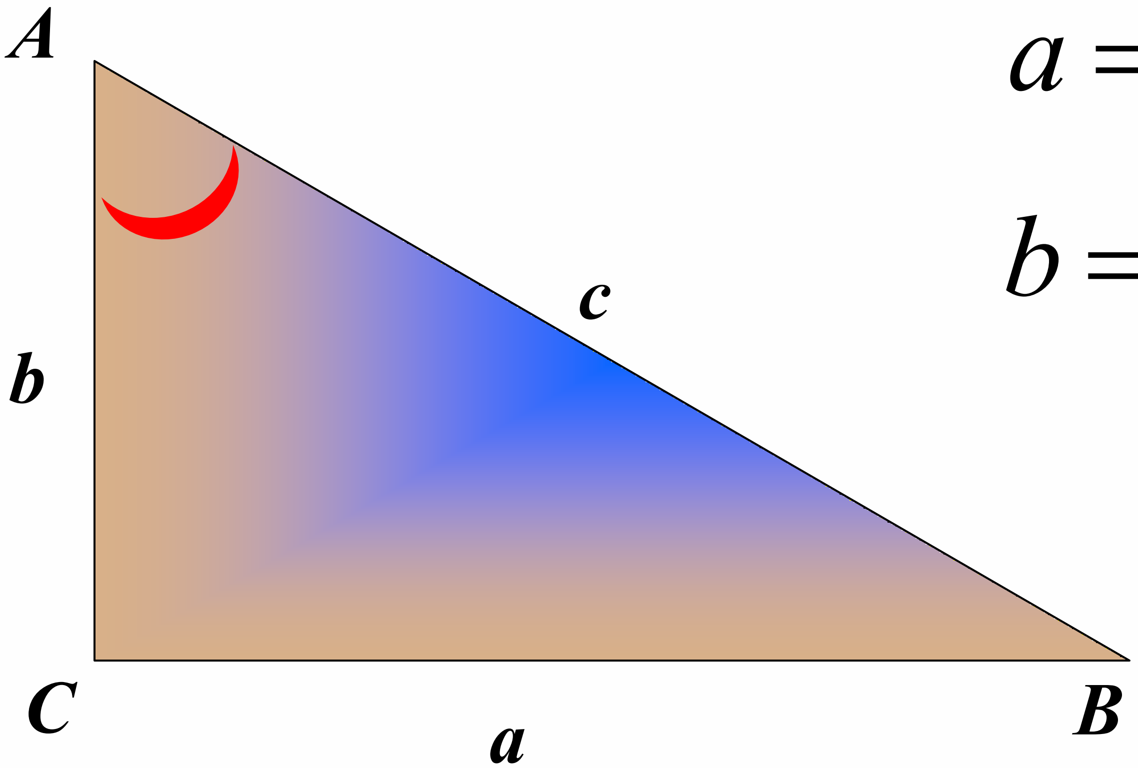
$$\sin A = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{b}{c}$$

$$tgA = \frac{a}{b}$$

$$ctgA = \frac{b}{a}$$

Залежність між сторонами і кутами у прямокутному трикутнику



$$a = c \cdot \sin A$$

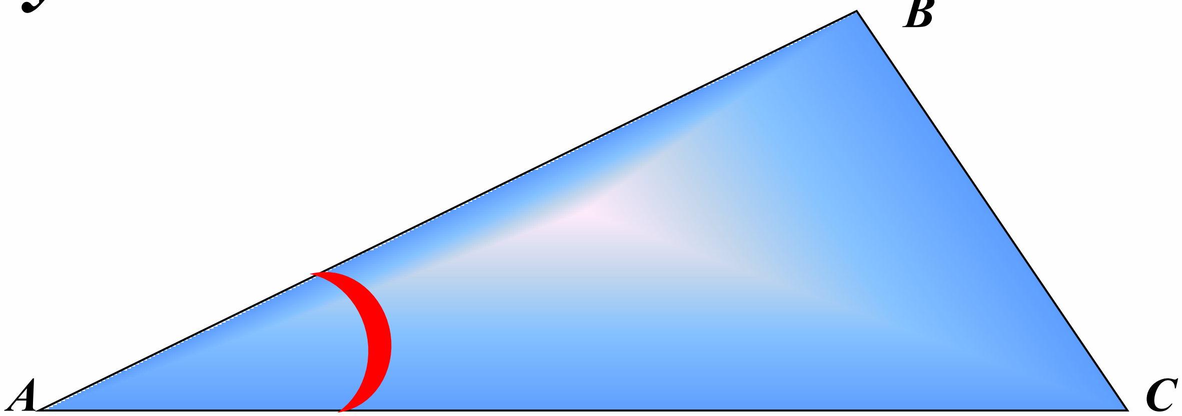
$$b = c \cdot \cos A$$

$$a = b \cdot tgA$$

$$b = a \cdot ctgA$$

Теорема косинусів.

- ***Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.***

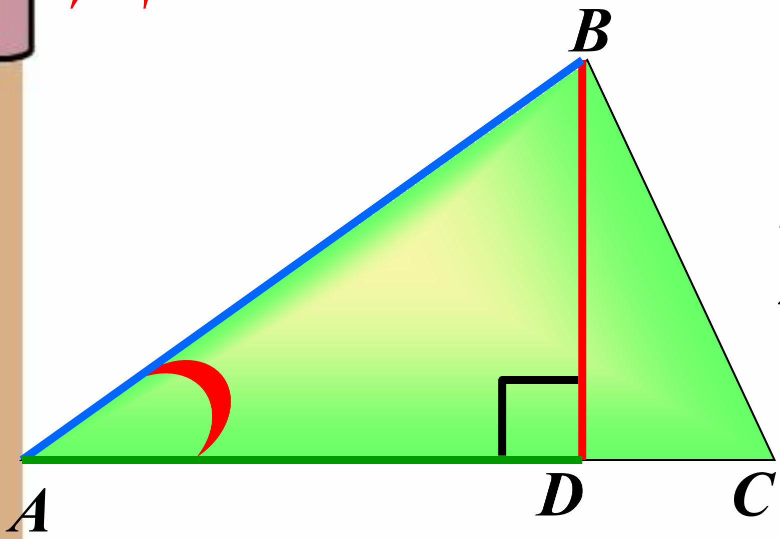


$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos A$$

Історична довідка

- *Теорема косинусів була доведена, звичайно,геометрично ще в “Началах” Евкліда.*
- *Словесно теорема косинусів була вперше сформульована французьким математиком Франсуа Вієтом в XVI столітті.*
- *Сучасний вид теорема косинусів приймає в 1801 році у французького математика Лазара Карно.*

Доведення:



1 випадок.

$$\angle CAB - \text{гострий}$$

1) Проведемо висоту BD.

2) З трикутника ABD отримаємо:

$$BD = AB \cdot \sin A$$

$$AD = AB \cdot \cos A$$

З трикутника BDC отримаємо:

$$\boxed{BC^2} = BD^2 + DC^2 = (AB \cdot \sin A)^2 + (AC - AD)^2 =$$

$$AB^2 \cdot \sin^2 A + (AC^2 - 2AC \cdot AD + AD^2) =$$

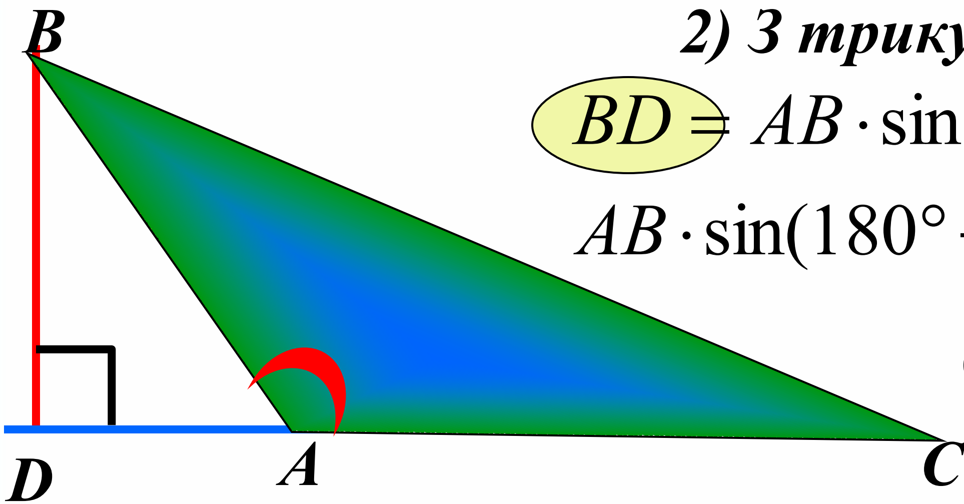
$$AB^2 \cdot \sin^2 A + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A + AB^2 \cdot \cos^2 A =$$

$$AB^2 \cdot (\sin^2 A + \cos^2 A) + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A =$$

$$\boxed{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A.}$$

Доведення: 2 випадок. $\angle CAB - тупий$

1) Проведемо висоту BD.



2) З трикутника ABD отримаємо:

$$BD = AB \cdot \sin BAD =$$

$$AB \cdot \sin(180° - \angle BAC) = AB \cdot \sin BAC$$

$$AD = AB \cdot \cos BAD =$$

$$AB \cdot \cos(180° - \angle BAC) =$$

$$-AB \cdot \cos BAC$$

З трикутника BDC:

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 = (AB \cdot \sin BAC)^2 + (AC + AD)^2 =$$

$$AB^2 \cdot \sin^2 BAC + (AC - AB \cdot \cos BAC)^2 =$$

$$AB^2 \cdot \sin^2 BAC + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos BAC + AB^2 \cdot \cos^2 BAC =$$

$$AB^2 \cdot (\sin^2 BAC + \cos^2 BAC) + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos BAC =$$

$$AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos BAC.$$

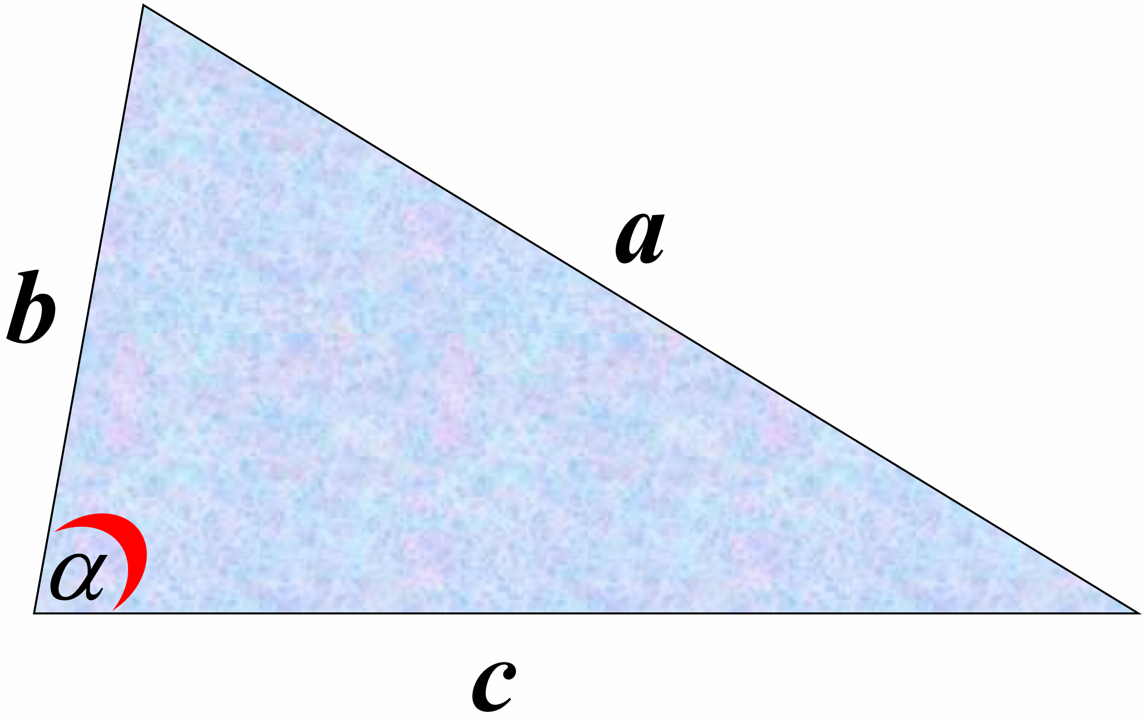
Доведення: *3 випадок.* $\angle A = 90^\circ \Rightarrow \cos 90^\circ = 0$

Отже, теорема косинусів набуває вигляду:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

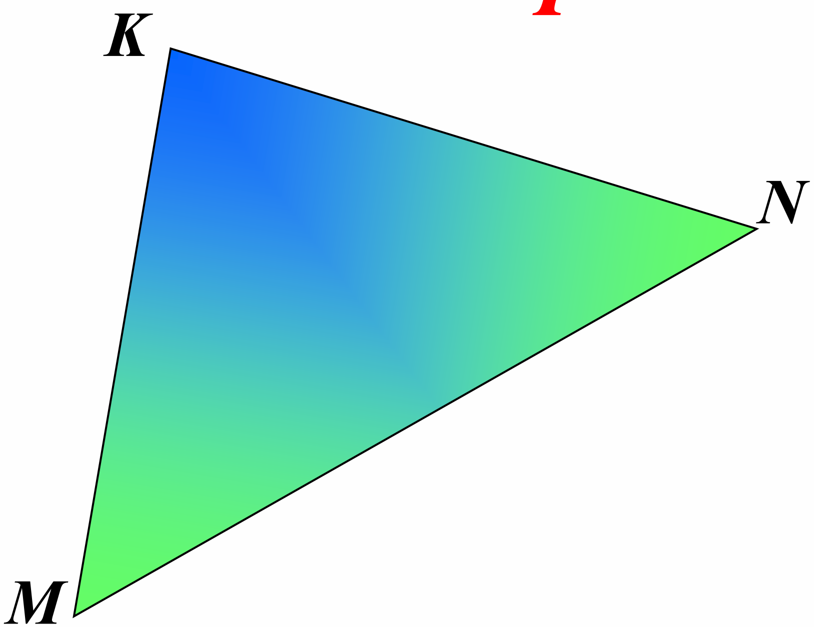
І виражає теорему Піфагора для трикутника ABC.

В загальному вигляді



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

Записати теорему косинусів для кожної сторони трикутника

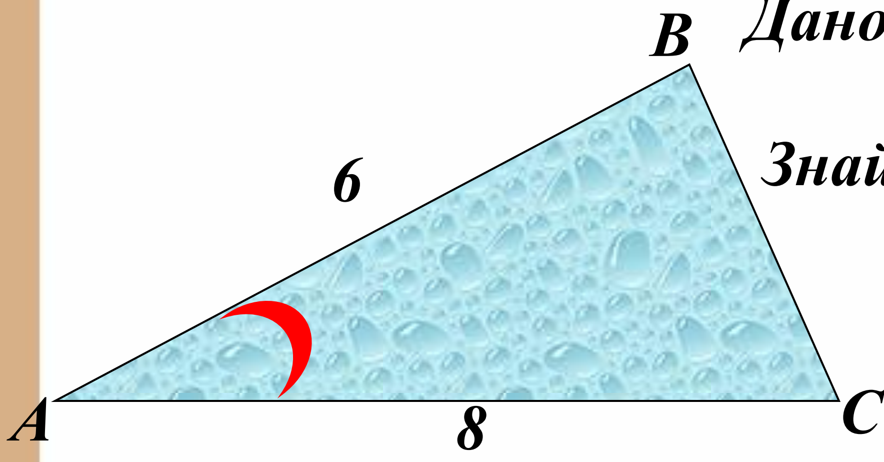


$$MN^2 = MK^2 + KN^2 - 2MK \cdot KN \cos K$$

$$MK^2 = KN^2 + MN^2 - 2KN \cdot MN \cos N$$

$$KN^2 = MK^2 + MN^2 - 2MK \cdot MN \cos M$$

Задача



Дано: *трикутник ABC,* $\angle A = 60°$

AB=6см, AC=8 см

Знайти: *BC*

Розв'язання.

З трикутника ABC за теоремою косинусів:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos BAC.$$

$$BC^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 60° =$$

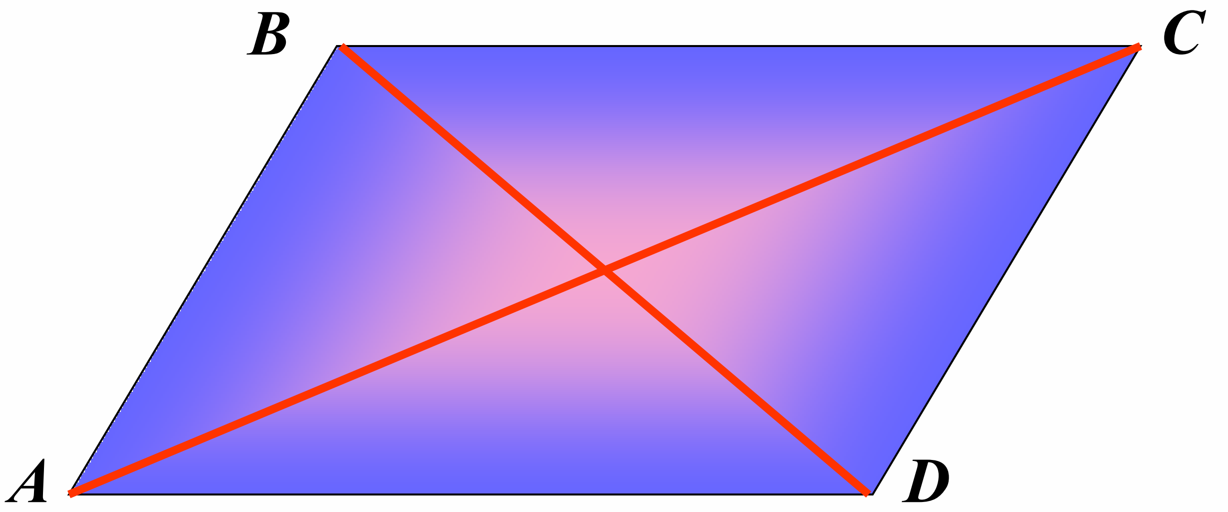
$$36 + 64 - 96 \cdot \frac{1}{2} = 100 - 48 = 52$$

$$BC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}(см)$$

Відповідь: $2\sqrt{13}(см)$

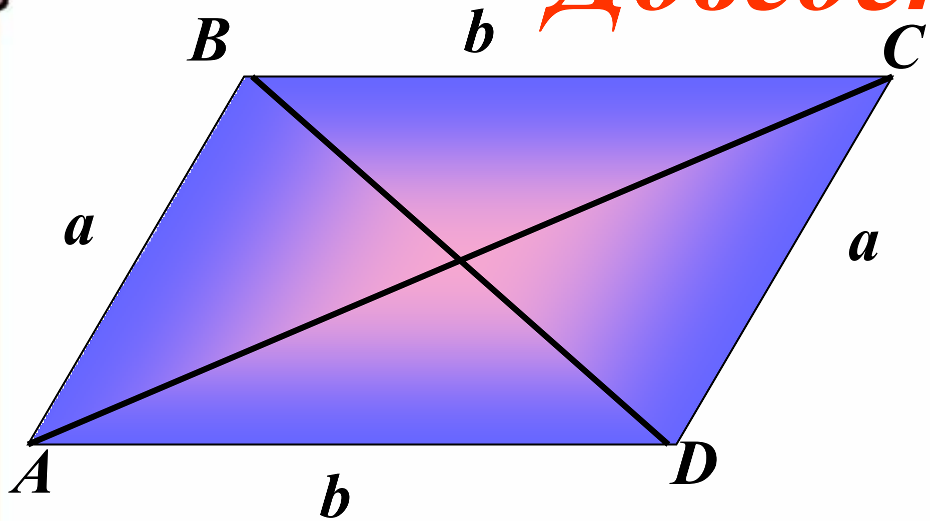
Наслідок (властивість діагоналей паралелограма)

Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.



$$AC^2 + BD^2 = 2 \cdot (AB^2 + BC^2)$$

Доведення:



Нехай AB=CD= a;
AD=BC= b.

$$\angle A = \alpha$$

$$\angle B = 180^\circ - \alpha$$

З трикутника ABD за теоремою косинусів:

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha$$

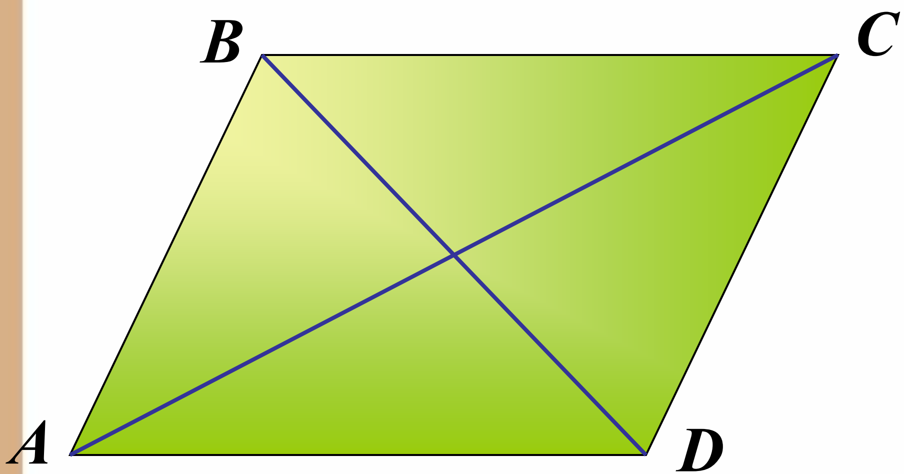
З трикутника ABC за теоремою косинусів:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\alpha$$

$$AC^2 + BD^2 =$$

$$a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\alpha + a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha = 2 \cdot (a^2 + b^2)$$

Дві сторони паралелограма дорівнюють 7 см і 11 см, а одна з діагоналей -12 см. Знайдіть другу діагональ паралелограма.



Дано: ABCD – паралелограм
AB=7см, BC=11см,
BD=12см.

Знайти: AC

Розв’язання.

$$AC^2 + BD^2 = 2\cdot(AB^2 + BC^2)$$

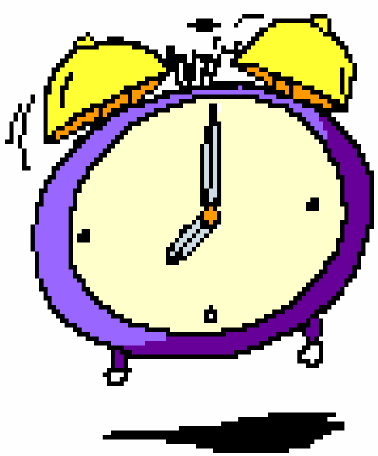
$$AC^2 + 12^2 = 2\cdot(7^2 + 11^2)$$

$$AC^2 + 144 = 2\cdot(49 + 121)$$

$$AC^2 = 340 - 144 = 196$$

$$AC = \sqrt{196} = 14(см)$$

Домашнє завдання:



Підсумок уроку

- За що ти можеш себе сьогодні **ПОХВАЛИТИ?**
- ***Що тобі ВДАЛОСЯ сьогодні на уроці?***
- ***Над чим ще потрібно ПОПРАЦЮВАТИ?***
- ***Навіщо нам був потрібний цей урок?***