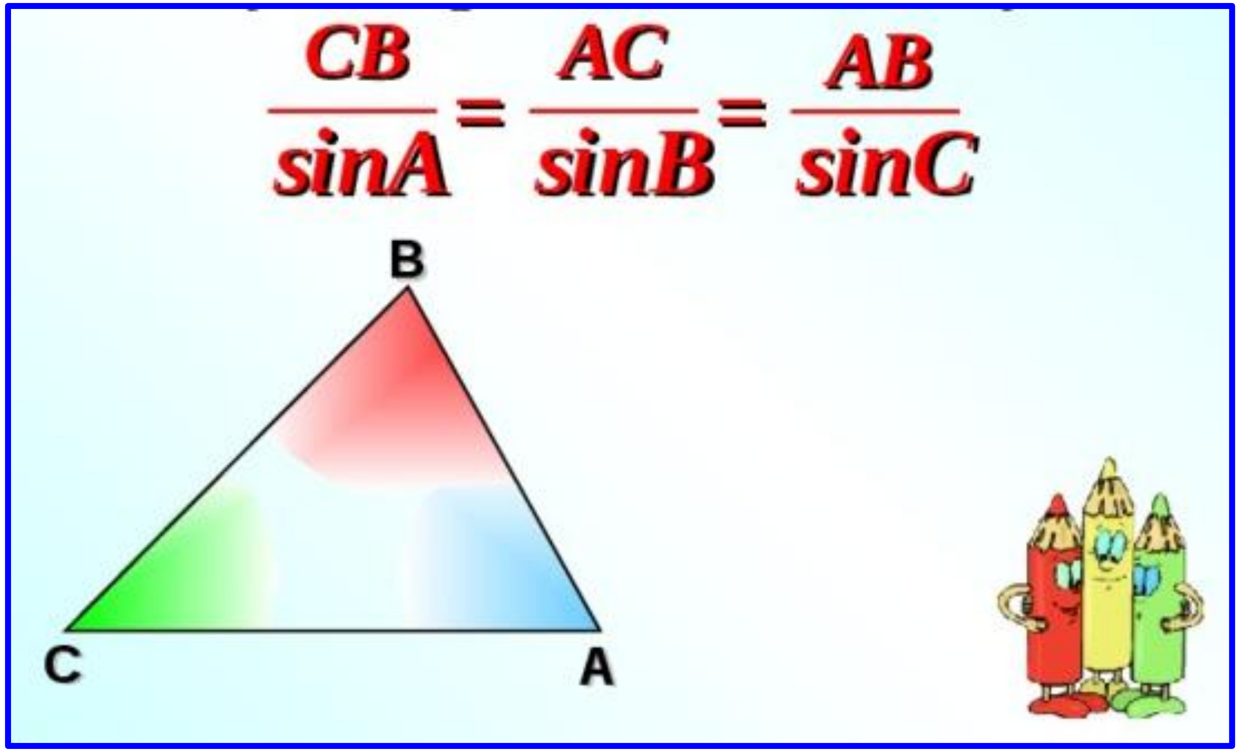
Теорема синусів



$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

512. Периметр трикутника дорівнює 60 см. Дві його сторони відносяться як 5 : 8, а кут між ними дорівнює 60°. Знайдіть сторони трикутника.

№ 512

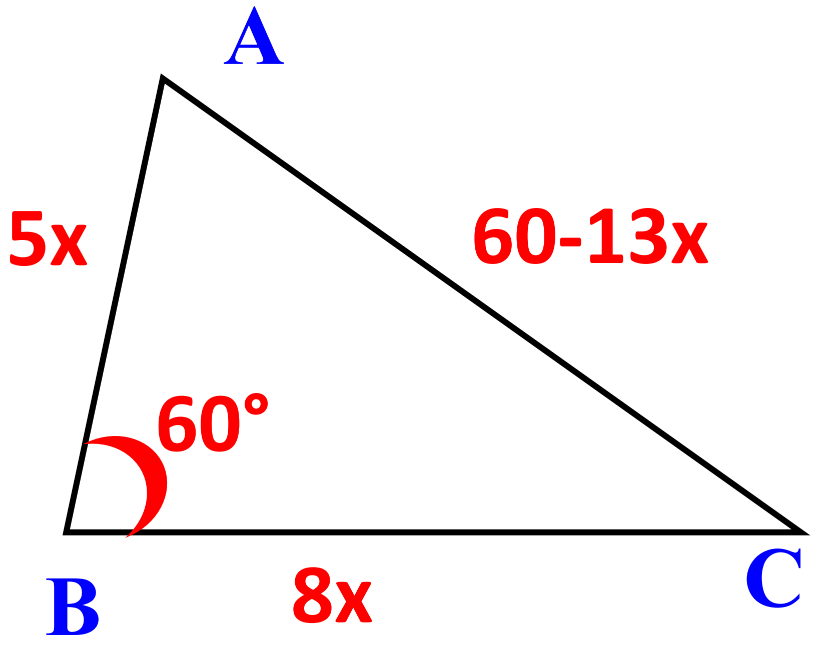
Дано: $\triangle ABC$

$AB:BC = 5 : 8$

$\angle B = 60°$

$P = 60$ см

Знайти: AB, BC, AC -?



Розв'язання: *Нехай x – коефіцієнт пропорційності, тоді AB = 5x см, BC= 8x см, AC = P – (AB + BC) = 60 – 13x.*

Запишемо теорему косинусів для сторони AC трикутника ABC:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos B$$

$$(60-13x)^2 = (5x)^2 + (8x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 8x \cdot \cos 60°$$

$$3600-1560x+169x^2=25x^2+64x^2-2 \cdot 40x^2 \cdot 0,5$$

$$3600-1560x+169x^2=25x^2+64x^2-40x^2$$

$$3600-1560x+169x^2-25x^2-64x^2+40x^2 = 0$$

$$120x^2-1560x+3600 = 0 \quad /120$$

$$x^2-13x+30 = 0$$

За теоремою Вієта:

$x_1 = 10;$ $x_2 = 3$ (см)

Не підходить

$AB = 5 \cdot 3 = 15$ (см)

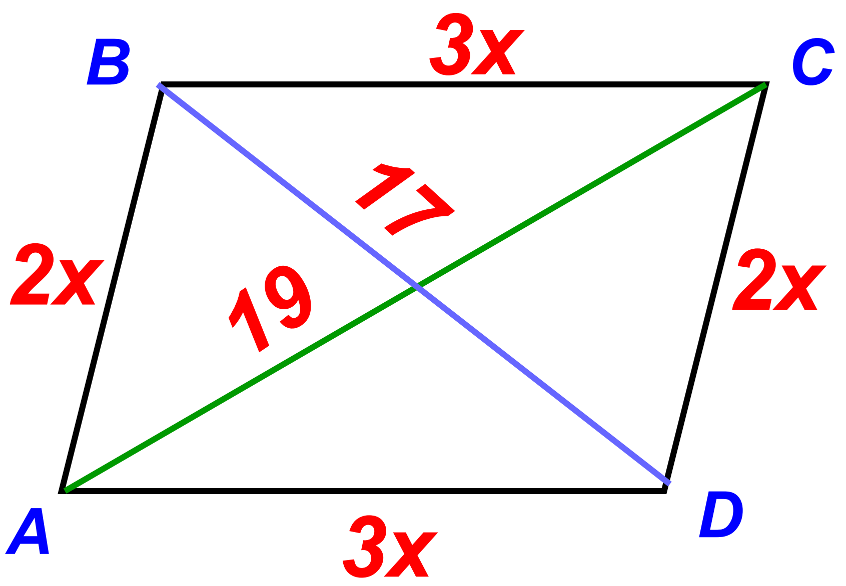
$BC = 8 \cdot 3 = 24$ (см)

$AC = 60 - 13 \cdot 3 = 60 - 39 = 21$ (см)

Відповідь: 15 см, 24 см, 21 см.

516. Знайдіть сторони паралелограма, якщо вони відносяться як 2 : 3, а діагоналі паралелограма дорівнюють 17 см і 19 см.

№ 516



Дано: □ABCD;
AB : AD = 2 : 3;
AC = 19 см, BD = 17 см.
Знайти: AB, BC -?

Розв'язання:

Нехай x – коефіцієнт пропорційності, тоді
AB = 2x см, AD = BC = 3x см.

Запишемо наслідок з теореми косинусів для паралелограма ABCD:

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2+BC^2)$$

$$19^2 + 17^2 = 2((2x)^2+(3x)^2)$$

$$361 + 289 = 2(4x^2 +9x^2)$$

$$26x^2 = 650$$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5$$

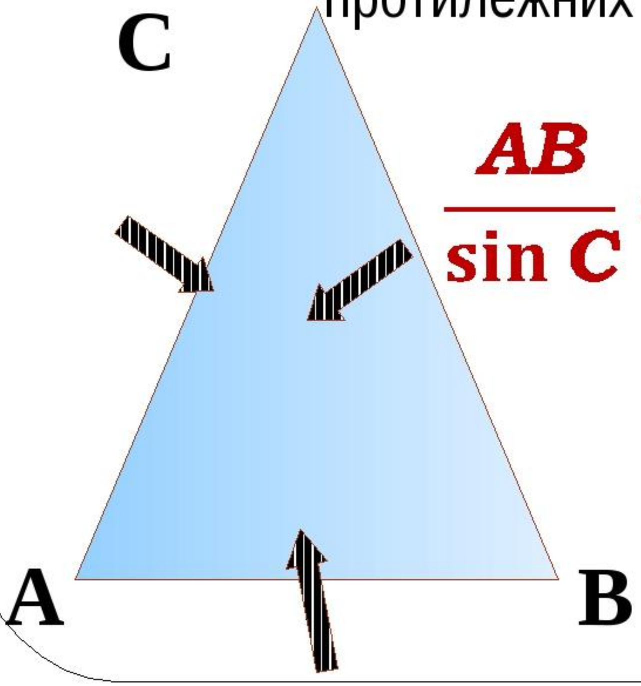
$AB= 2·5 = 10$ (см)

$BC= 3·5 = 15$ (см)

Відповідь: 10 см, 15 см.

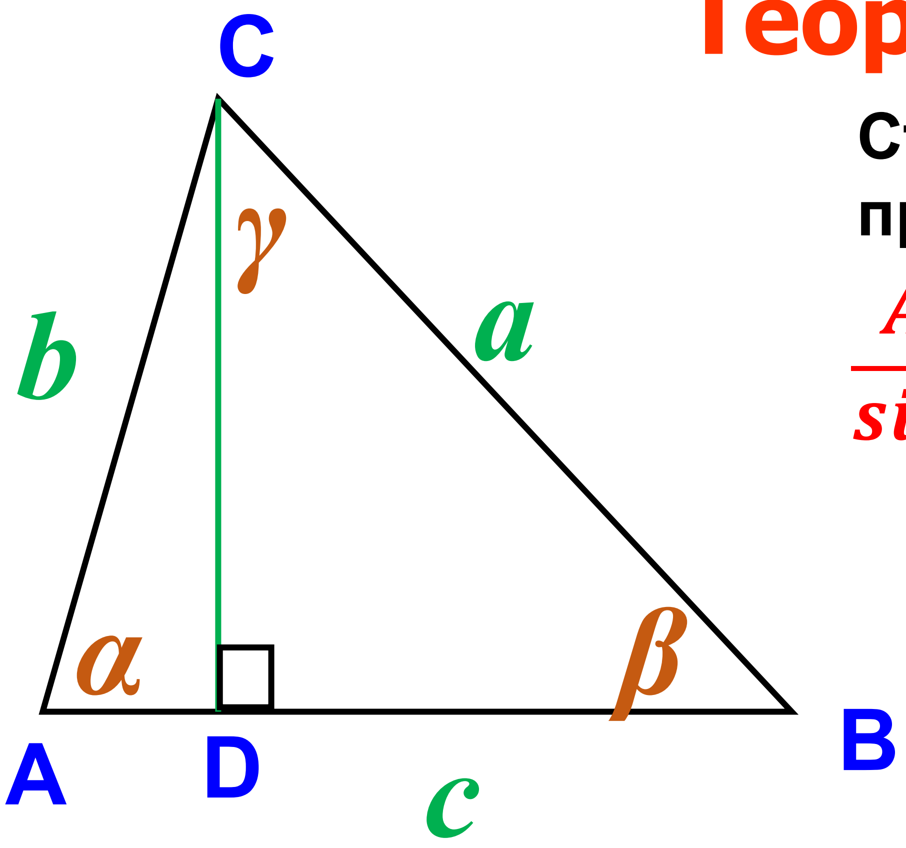
Теорема синусів

Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів



$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}$$

Теорема синусів



Сторони трикутників пропорційні синусам протилежних кутів

$$\frac{AB}{sinC} = \frac{BC}{sinA} = \frac{AC}{sinB} \qquad \frac{c}{sin\gamma} = \frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta}$$

Проведемо висоту CD.

Із ΔACD знайдемо:CD = AC·sinA.

Із ΔBCD знайдемо:CD = BC·sinB.

Прирівняємо: AC·sinA = BC·sinB.

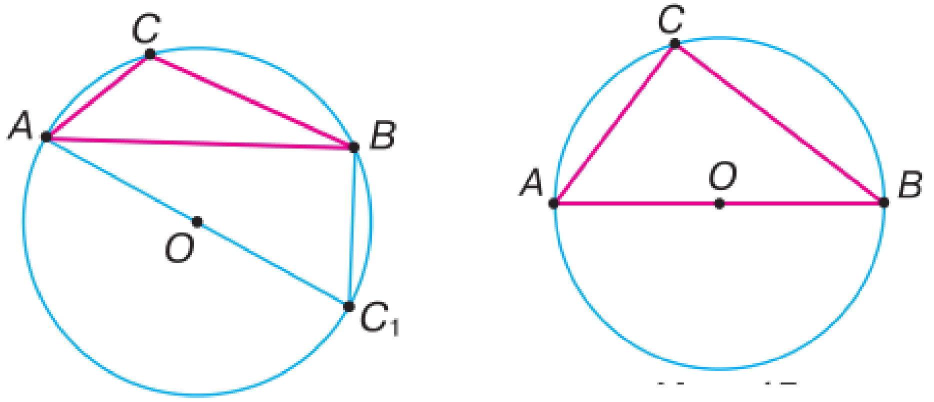
Тоді: $\frac{AC}{sinB} = \frac{BC}{sinA}$ **Аналогічне співвідношення отримаємо і для інших висот.**

Отже, $\frac{AB}{sinC} = \frac{BC}{sinA} = \frac{AC}{sinB}$ $\quad a : b : c = sin\alpha : sin\beta : sin\gamma$

Наслідки з теореми синусів

Н 1 У будь-якому трикутнику відношення сторони до синуса протилежного кута дорівнює діаметру кола, описаного навколо цього трикутника

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = 2R$$

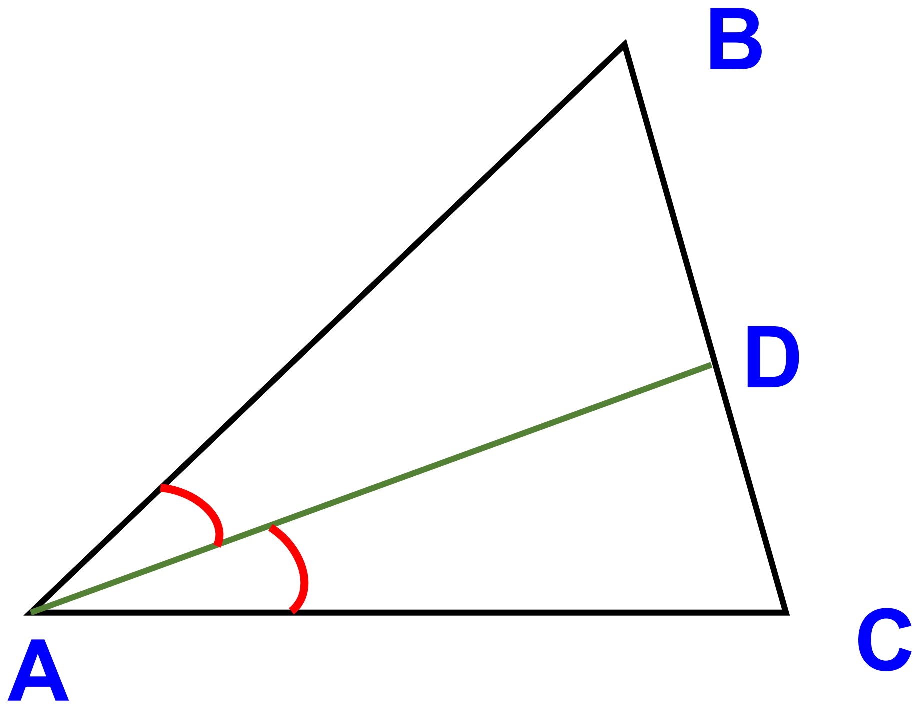


$$c = 2R\sin\gamma;\ a = 2R\sin\alpha;\ b = 2R\sin\beta$$

Н 2 У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, а проти більшого кута лежить більша сторона

Наслідки з теореми синусів

Н 3 **Бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам**



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

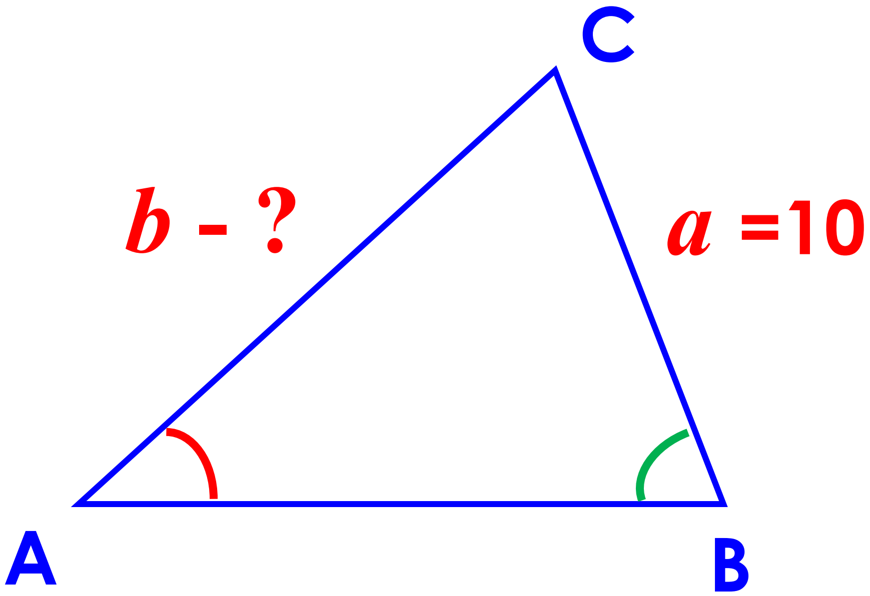
$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{BD}$$

$$\frac{AC}{DC} = \frac{AB}{BD}$$

545. У трикутнику ABC $\sin A = 0{,}2$, $\sin B = 0{,}4$, $a = 10$ см. Знайдіть b.

546. У трикутнику ABC $a = 2$ см, $b = 6$ см, $\sin A = 0{,}3$. Знайдіть $\sin B$.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \qquad b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A}$$

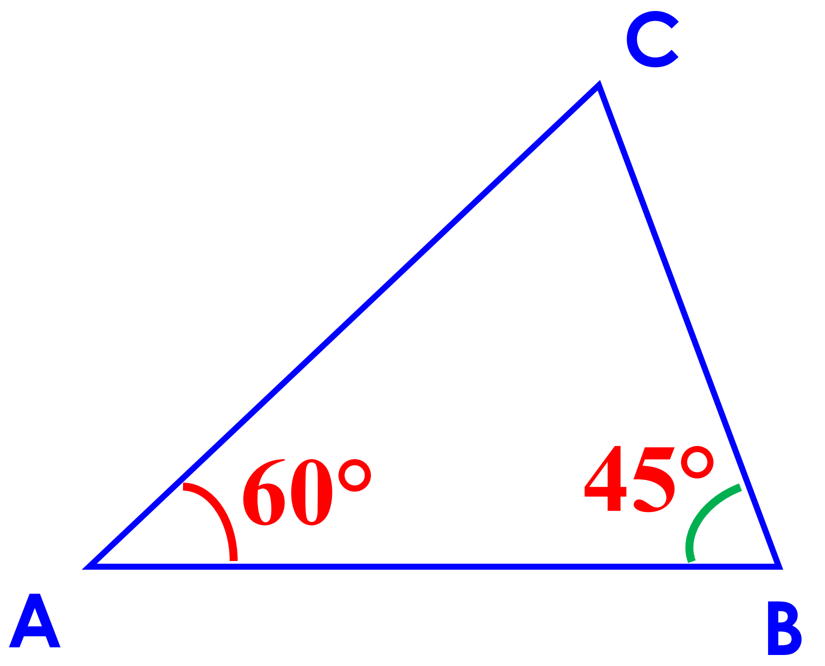
$$b = \frac{10 \cdot 0{,}4}{0{,}2} = 20\ (\text{см})$$

Відповідь: 20 см.

Середній рівень

547. У трикутнику ABC $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$. Знайдіть відношення сторони BC до сторони AC.

548. У трикутнику ABC $\angle B = 30°$, $\angle C = 60°$. Знайдіть відношення сторони AC до сторони AB.



$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \qquad \frac{BC}{AC} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\sin 60°}{\sin 45°} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

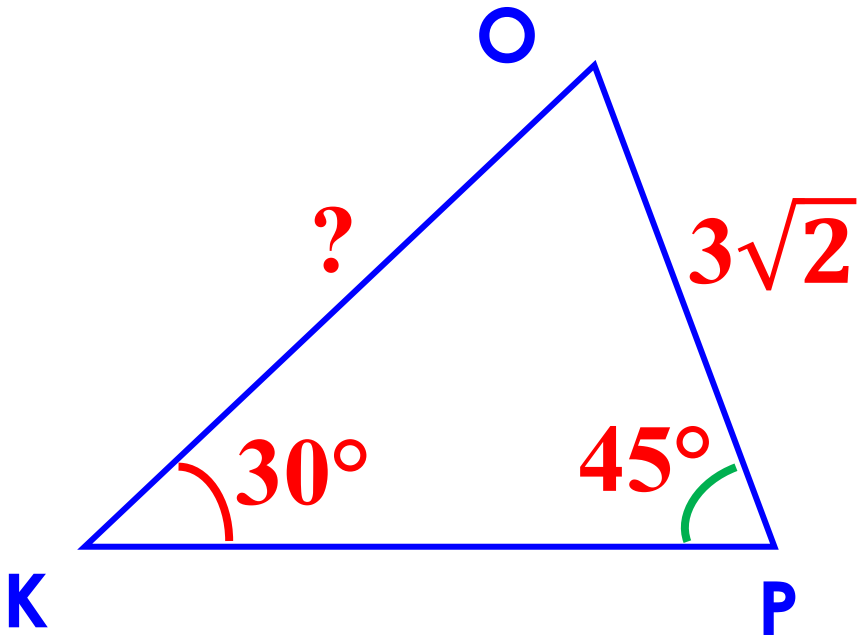
$$\frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6} : 2$$

Відповідь: $\sqrt{6} : 2$.

549. У трикутнику OKP $OP = 3\sqrt{2}$ см, $\angle K = 30°$, $\angle P = 45°$. Знайдіть OK.

550. У трикутнику OKP $OK = 4\sqrt{3}$ см, $\angle K = 60°$, $\angle P = 30°$. Знайдіть OP.

№ 549



$$\frac{OP}{\sin K} = \frac{OK}{\sin P} \qquad \frac{3\sqrt{2}}{\sin 30°} = \frac{OK}{\sin 45°}$$

$$OK = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sin 45°}{\sin 30°} = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 0,5} = 6 \text{ (см)}$$

Відповідь: 6 см.

553. У трикутнику ABC $AB = 7\sqrt{3}$ см, $\angle C = 120°$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

554. У трикутнику ABC $BC = 6$ см, $\angle A = 30°$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

$$\frac{AB}{\sin C} = 2R \qquad \frac{7\sqrt{3}}{\sin 120°} = 2R$$

$$R = \frac{7\sqrt{3}}{2\sin 120°} = \frac{7\sqrt{3}}{2\sin 60°} = \frac{7\sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3}} = 7\ (\text{СМ})$$

Відповідь: 7 см.